

## Θεμα Α

**A1.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 334-335

**A2.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 246-247

**A3.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 222

**A4.** α. **Λάθος**      β. **Σωστό**      γ. **Σωστό**      δ. **Λάθος**      ε. **Σωστό**

## Θεμα Β

**B1.** Είναι:  $(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2$

$$\Leftrightarrow (z - 2)(\overline{z - 2}) + |z - 2| = 2$$

$$\Leftrightarrow |z - 2|^2 + |z - 2| - 2 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε  $|z - 2| = \rho > 0$ , οπότε η (1) γράφεται:

$$\rho^2 + \rho - 2 = 0 \Leftrightarrow \rho = -2 \text{ απορρίπτεται} \quad \text{ή} \quad \rho = 1$$

Άρα  $|z - 2| = 1$  και ο γεωμετρικός τόπος των  $z$  είναι κύκλος με κέντρο  $K(2,0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .

$$\text{Ισχύει: } |z| = |z - 2 + 2| \leq |z - 2| + 2 = 3$$

Εναλλακτικά, ο μιγαδικός με το μέγιστο μέτρο είναι ο  $z = 3$  με  $|z| = 3$ .

Οπότε ισχύει:  $|z| \leq 3$ .

**B2.** Για τους  $z_1, z_2$  που ανήκουν στον κύκλο και είναι συζυγείς ως ρίζες της εξίσωσης:

$$w^2 + \beta w + \gamma = 0 \text{ ισχύει:}$$

$$|Im(z_1) - Im(z_2)| = 2 \Leftrightarrow |Im(z_1) - Im(\bar{z}_1)| = 2 \Leftrightarrow 2|Im(z_1)| = 2$$

$$\Leftrightarrow Im(z_1) = 1 \quad \text{ή} \quad Im(z_1) = -1$$

Οπότε θεωρούμε:  $z_1 = 2 + i$  και  $z_2 = \bar{z}_1 = 2 - i$

$$\text{Για την εξίσωση ισχύει: } \begin{cases} z_1 + z_2 = -\beta \\ z_1 \cdot z_2 = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4 \\ \gamma = 5 \end{cases}$$

## B3. Ισχύει:

$$\begin{aligned}v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 &= 0 \\ -v^3 &= \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0\end{aligned}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned}|-v^3| &= |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \\ |v|^3 &\leq |\alpha_2| \cdot |v|^2 + |\alpha_1| \cdot |v| + |\alpha_0|, \quad (1)\end{aligned}$$

Θέτω:  $|v| = \rho > 0$  οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$$\rho^3 \leq |\alpha_2| \rho^2 + |\alpha_1| \cdot \rho + |\alpha_0|$$

Χρησιμοποιώντας ότι:  $|\alpha_0| \leq 3$ ,  $|\alpha_1| \leq 3$ ,  $|\alpha_2| \leq 3$  παίρνουμε:

$$\rho^3 \leq 3\rho^2 + 3\rho + 3$$

$$\rho^3 - 3\rho^2 - 3\rho - 3 \leq 0 < 1$$

$$\rho^3 - 3\rho^2 - 3\rho - 4 < 0$$

$$(\rho - 4)(\rho^2 + \rho + 1) < 0, \quad (\text{με σχήμα Horner})$$

$$\rho - 4 < 0, \quad \text{αφού } \rho^2 + \rho + 1 > 0 \text{ για κάθε } \rho > 0$$

$$\rho < 4 \text{ ή } |v| < 4.$$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$(f(x) + x) \cdot (f'(x) + 1) = x$$

$$2(f(x) + x) \cdot (f'(x) + 1) = 2x$$

$$[(f(x) + x)^2]' = (x^2)'$$

Άρα υπάρχει αριθμός  $c \in \mathbb{R}$  ώστε:  $[f(x) + x]^2 = x^2 + c$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Για  $x = 0$  προκύπτει  $c = 1$ .

Άρα ισχύει:  $(f(x) + x)^2 = x^2 + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  (1)

Για τη συνάρτηση  $h(x) = f(x) + x$  με  $x \in \mathbb{R}$  και επειδή:  $x^2 + 1 > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

ισχύει:  $h(x) \neq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Η  $h$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως άθροισμα συνεχών, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

Επειδή:  $h(0) = f(0) = 1 > 0$  ισχύει:  $h(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  (2)

Η (1) γράφεται:  $(h(x))^2 = x^2 + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

και λόγω της σχέσης (2) παίρνουμε:  $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

$$f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Γ2.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0,$$

γιατί:  $\sqrt{x^2 + 1} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Διαφορετικά**, λύνουμε την ανίσωση:  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 + 1} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > x$

αν  $x \geq 0$  τότε:  $x^2 + 1 > x^2$  που ισχύει

αν  $x < 0$  προφανώς ισχύει.

Άρα:  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Επίσης προκύπτει:  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Για την εξίσωση έχουμε:  $f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow f(g(x)) = f(0) \Leftrightarrow g(x) = 0$  (3), αφού η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεπώς «1-1».

Οπότε η (3) γράφεται:

$$x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:  $\varphi(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$  με  $x \in \mathbb{R}$

Η  $\varphi$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική με  $\varphi'(x) = 6x^2 + 6x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Λύνουμε την εξίσωση:  $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ή  $x = -1$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$	
$\varphi'(x)$	+	○	-	○	+
$\varphi(x)$	↗		↘		↗

- Η  $\varphi$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\Delta_1 = (-\infty, -1]$   
Άρα:

$$\varphi(\Delta_1) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), \varphi(-1) \right] = (-\infty, -1], \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$$

Επειδή  $0 \notin \varphi(\Delta_1)$  η εξίσωση  $\varphi(x) = 0$  είναι αδύνατη

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

- Η  $\varphi$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\Delta_2 = [-1, 0]$   
Άρα  $\varphi(\Delta_2) = [\varphi(0), \varphi(-1)] = [-2, -1]$   
Επειδή  $0 \notin \varphi(\Delta_2)$  η εξίσωση  $\varphi(x) = 0$  είναι αδύνατη
- Η  $\varphi$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\Delta_3 = [0, +\infty)$   
Άρα:  
 $\varphi(\Delta_3) = [\varphi(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)] = [-2, +\infty)$ , αφού  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$   
Επειδή το  $0 \in \varphi(\Delta_3)$ , (αφού η  $\varphi \uparrow$  στο  $\Delta_3$ ) η εξίσωση  $\varphi(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα  $\rho \in (0, +\infty)$

### Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t) dt + f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\varphi x \text{ με } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , η συνάρτηση  $\int_0^x f(t) dt$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .

Οπότε είναι και συνεχής στο  $\mathbb{R}$ . Άρα η συνάρτηση  $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t) dt$  είναι συνεχής στο  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  ως σύνθεση συνεχών.

- Η  $\Phi$  είναι συνεχής στο  $[0, \pi/4]$  ως άθροισμα γινόμενο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων,
- $\Phi(0) = \int_0^{-\frac{\pi}{4}} f(t) \cdot dt = - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) \cdot dt < 0$  αφού ισχύει  $f(t) > 0$  για κάθε  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$

$$\text{Οπότε: } \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) \cdot dt > 0 \Leftrightarrow - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) \cdot dt$$

- $\Phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = f(0) \cdot \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 1 > 0$   
Άρα ισχύει  $\Phi(0) \Phi\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$

Από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  για τον οποίο ισχύει:

$$\Phi(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_0-\frac{\pi}{4}} f(t) \cdot dt + f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\varphi x_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) \cdot dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\varphi x_0$$

**β' τρόπος:** Οι μαθητές θα μπορούσαν να λύσουν το θέμα και ως εξής:

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(x) \cdot dt + f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu x \cdot \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t) \cdot dt + \eta\mu x \cdot f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\left[ \eta\mu x \cdot \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t) \cdot dt \right]' = 0 \quad (4)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = \eta\mu x \cdot \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t) dt, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Η  $h$  είναι συνεχής στο  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  και η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ .

Είναι:  $h(0) = 0$  και  $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ , δηλαδή  $h(0) = h\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  για τον οποίο ισχύει:

$h'(x) = 0$ , άρα ισχύει η σχέση (4).

## ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \text{ Είναι: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(1+5h) - f(1)}{h} + \frac{f(1) - f(1-h)}{h} \right]$$

$$\text{Ισχύει: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \right] = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 5 \cdot f'(1)$$

Με αντικατάσταση  $x = 1 + 5h \Leftrightarrow h = \frac{x-1}{5}$  και  $x \rightarrow 1$  όταν  $h \rightarrow 0$  παίρνουμε:

Αντίστοιχα, για το όριο:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h)}{h}$  με αντικατάσταση  $t = 1 - h \Leftrightarrow h = 1 - t$  και

$t \rightarrow 1$  όταν  $h \rightarrow 0$  παίρνουμε:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h)}{h} = + \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t) - f(1)}{t-1} = f'(1)$$

Οπότε από την (1) προκύπτει:

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 6f'(1) \Leftrightarrow 6f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0 \quad (2)$$

Για  $0 < x < 1$  είναι:  $f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

και για  $x > 1$  είναι:  $f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ , εφόσον η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$

Έτσι προκύπτει ο πίνακας:

	0		$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$		Ολικό Ελάχιστο	

Οπότε η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για  $x = 1$  το  $f(1) = 1$ .

**Δ2.** Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$  ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης  $\frac{f(t)-1}{t-1}$  με

$$g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$$

Ισχύει:  $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) = 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$

Οπότε η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(1, +\infty)$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση:  $h(x) = \int_x^{x+1} g(t)dt, x \in (1, +\infty)$

Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη με  $h'(x) = g(x+1) - g(x) > 0$ , αφού η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(1, +\infty)$ . Οπότε η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(1, +\infty)$ .

Η ανίσωση γράφεται:

$$h(8x^2 + 5) > h(2x^4 + 5) \Leftrightarrow 8x^2 + 5 > 2x^4 + 5 \Leftrightarrow 2x^2(4 - x^2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$$

**Δ3.** Η  $g$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$  με

$$g'' = \left( \frac{f(x)-1}{x-1} \right)' = \frac{f'(x) \cdot (x-1) - (f(x)-1)}{(x-1)^2}$$

$$g''(x) = \frac{1}{(x-1)} \left[ f'(x) - \left( \frac{f(x)-1}{x-1} \right) \right] \quad (3)$$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, x]$  και παραγωγίσιμη στο  $(1, x)$  ενώ η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα.

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την  $f$  υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (1, x)$  τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f(x) - 1}{x - 1}$$

Επειδή  $1 < \xi < x$  είναι:  $f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow f'(x) - f'(\xi) > 0$ .

Οπότε από τη σχέση (3) προκύπτει ότι:

$$g''(x) = \frac{1}{x-1} \cdot [f'(x) - f'(\xi)] > 0$$

Άρα η  $g$  είναι κυρτή στο  $(1, +\infty)$ .

Η εξίσωση γράφεται:

$$(\alpha - 1) \cdot g(x) - (f(\alpha) - 1)(x - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = 0, \text{ όπου } \varphi(x) = (\alpha - 1) \cdot g(x) - (f(\alpha) - 1)(x - a) \text{ με } x \in (1, +\infty).$$

Παρατηρούμε ότι:  $\varphi(\alpha) = 0$ . Αρκεί να δείξουμε ότι είναι μοναδική λύση.

Η  $\varphi$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$  με:

$$\varphi'(x) = (\alpha - 1) \cdot g'(x) - (f(\alpha) - 1)$$

$$\varphi'(x) = (\alpha - 1) \left[ g'(x) - \left( \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1} \right) \right], \text{ αφού } f(1) = 1$$

$$\varphi'(x) = (\alpha - 1)(g'(x) - g'(\alpha))$$

Θέτουμε  $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = g'(\alpha) \Leftrightarrow x = a$  γιατί  $g'$  γνησίως αύξουσα.

Επίσης:  $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > g'(\alpha) \Leftrightarrow x > a$

$\varphi'(x)$	1	$a$
$\varphi(x)$	+	-

O.E

Άρα για κάθε  $x > 1$  είναι:  $\varphi(x) \geq \varphi(\alpha)$  με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = a$

Άρα:  $\varphi(x) > 0$  για κάθε  $x > 1$  με  $x \neq a$  και συνεπώς η λύση  $x = a$  είναι μοναδική.

Επιμέλεια: Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Χρήστος Αναστασίου, Αλέξανδρος Φιτσόπουλος, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Ηρώ Μαρκάκη