ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄

2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρια σελ. 251 σχολικου βιβλιου.

Α2. Θεωρια σελ 273 σχολικου βιβλιου.

Α3. Θεωρια σελ. 150 σχολικου βιβλιου

Α4. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αν θέσουμε $z = x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$ θα είναι $\bar{z} = x-yi$ και η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$$2(x^2+y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \iff$$

$$[2(x^2+y^2)-4] + (2x-2)i = 0 \iff$$

$$[(x^2+y^2)-2] + (x-1)i = 0 \iff$$

$$x^2+y^2-2=0 \text{ και } x-1=0 \iff$$

$$x^2+y^2=2 \text{ και } x=1 \iff$$

$$y^2=1 \text{ και } x=1 \iff$$

$$y=\pm 1 \text{ και } x=1.$$

Άρα οι λύσεις είναι $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$

B2. Είναι $w = 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39} = 3\cdot\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39} =$

$= 3\left[\frac{(1+i)(1+i)}{2}\right]^{39} = 3\cdot\left[\frac{1+2i-1}{2}\right]^{39} =$

$= 3(i)^{39} = 3i^{38}\cdot i = 3(i^2)^{19}\cdot i = 3\cdot(-1)\cdot i = -3i.$

B3. Η σχέση $|u+w| = |4z_1 - z_2 - i|$ γράφεται:

$|u-3i| = |4+4i-1+i-i| \Leftrightarrow$

$|u-3i| = |3+4i| \Leftrightarrow |u-3i| = 5.$ Αν $u = x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$

έχουμε $|x+yi-3i| = 5 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2 = 5^2$

Επομένως ο γ.τ. των μιγαδικών u είναι κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho=5$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $h'(x) = 1 - \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} > 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα h είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης, είναι $h''(x) = \left(\frac{1}{e^x+1}\right)' = -\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2} < 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η h είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Η δοσμένη ανίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \ln\left[e^{h(2h'(x))}\right] < \ln\left(\frac{e}{e+1}\right) \quad (1)$$

Επειδή $h(1) = 1 - \ln(e+1) = \ln e - \ln(e+1) = \ln\left(\frac{e}{e+1}\right)$

η (1) γράφεται $\ln\left[e^{h(2h'(x))}\right] < h(1)$.

Επειδή η h είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, προκύπτει ισοδύναμα ότι $2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $h'(x) < h(0)$ (2).

Επειδή η h είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, θα είναι και $h'(x)$ γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι από τη (2) προκύπτει ισοδύναμα $x > 0$.

Γ3. • Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[x - \ln(e^x+1)] =$

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln e^x - \ln(e^x+1)] = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x+1-1}{e^x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right) \overset{*}{=} \ln 1 = 0$$

* Διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x+1} = 0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right) = \lim_{y\to 0}\ln(1-y) = \ln 1 = 0.$$

Άρα η οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι η $y=0$.

• Για την πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\ln(e^x+1)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\ln(e^x+1)}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{1}{x}\ln(e^x+1)\right] = 1-0 = 1.$$

Διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x+1) = \ln 1 = 0$, αφου $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Επίσης, είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(h(x)-x) = \lim\limits_{x\to-\infty}[x-\ln(e^x+1)-x]$

$$= \lim_{x\to-\infty}[-\ln(e^x+1)] = -\ln 1 = 0.$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της h στο $-\infty$ είναι η $y=x$.

Γ4. Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της φ.
Επειδή $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αρκεί να μελετήσουμε την $g(x)=h(x)+\ln 2 = h(x)-h(0)$.
Όμως, $g'(x)=h'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η g γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης $g(0)=h(0)-h(0)=0$.
Επειδή η g είναι γν. αύξουσα, η ρίζα $x=0$ θα είναι μοναδική για την g.

Για $x\geq 0$ θα είναι $g(x)\geq g(0) \iff g(x)\geq 0$.

Επομένως $\varphi(x)=e^x\cdot g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$.
Άρα $E=\int_0^1 \varphi(x)\,dx=\int_0^1 \left[e^x h(x)+e^x\ln 2\right]dx=$

$$=\int_0^1 \left[(e^x)' h(x)\right]dx+\ln 2\int_0^1 e^x\,dx=$$

$$=\left[e^x h(x)\right]_0^1-\int_0^1 e^x h'(x)\,dx+\ln 2\cdot\left[e^x\right]_0^1=$$
$$= e h(1)-h(0)-\int_0^1 e^x\cdot\frac{1}{e^x+1}\,dx+\ln 2\,(e-1)=$$
$$= e\left(1-\ln(e+1)\right)+\ln 2-\int_0^1 \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx+(e-1)\ln 2=$$

$$= e-e\ln(e+1)+\ln 2-\left[\ln(e^x+1)\right]_0^1+(e-1)\ln 2=$$
$$= e-e\ln(e+1)+e\ln 2-\left[\ln(e+1)-\ln 2\right]=$$
$$= e-e\ln(e+1)+e\ln 2-\ln(e+1)+\ln 2=$$
$$= e-\ln(e+1)\cdot(e+1)+\ln 2\cdot(e+1)=$$
$$= e-(e+1)\left[\ln(e+1)-\ln 2\right]=e-(e+1)\cdot\ln\frac{e+1}{2}.$$