

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 31

A2. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 22

A3. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 87

A4. α) **Λάθος** β) **Σωστό** γ) **Λάθος** δ) **Λάθος** ε) **Σωστό**

ΘΕΜΑ Β

B1. Λύνουμε την εξίσωση: $(3x - 1)(8x^2 - 6x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$x_1 = 1/3, x_2 = \frac{6+2}{16} = \frac{1}{2} \text{ και } x_3 = \frac{6-2}{16} = \frac{1}{4}$$

Επειδή: $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ ισχύει: $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$

Επομένως είναι: $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

B2.

α' τρόπος

Έχουμε: $P(A' - B') = P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

$$= P(A \cup B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

β' τρόπος

Είναι: $P(A' - B') = P(A') - P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P((A \cup B)')$

$$= 1 - P(A) - 1 + P(A \cup B) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Παρατηρούμε ότι: $\Delta = (A \cap B)'$ οπότε για την πιθανότητα του Δ ισχύει:

$$P(\Delta) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

B3. Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$, $B - A$ ασυμβίβαστα έχουμε:

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

$$P(E) = P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

B4. Λύνουμε την εξίσωση: $9x^2 - 3x - 2 = 0$ με $\Delta = 9 + 72 = 81$

$$\text{Οπότε οι λύσεις είναι: } \begin{cases} x_1 = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \\ x_2 = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Η λύση x_2 απορρίπτεται διότι: $0 \leq P(\Gamma) \leq 1$

$$\text{Επίσης: } P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

Έστω ότι τα ενδεχόμενα B, Γ είναι ασυμβίβαστα. Τότε: $P(B \cap \Gamma) = 0$

$$\text{και } P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12} > 1 \text{ άτοπο διότι: } 0 \leq P(B \cup \Gamma) \leq 1$$

Συνεπώς τα B, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Ερμηνεύοντας τα δεδομένα παίρνουμε:

$$f_1\% = 10, f_5\% = 30. \text{ Επίσης: } \alpha_3 = 108^0 \Leftrightarrow f_3 = \frac{108}{360} \Leftrightarrow f_3 = 0,3 \text{ ή } f_3\% = 30.$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^5 f_i = 1 \Leftrightarrow f_2 = 0,3 - f_4 \quad (1)$$

Επίσης:

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^5 x_i \cdot f_i = 14 \Leftrightarrow 9 \cdot 0,1 + 11 \cdot (0,3 - f_4) + 13 \cdot 0,3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0,3 = 14$$

$$\Leftrightarrow 4f_4 = 0,8 \Leftrightarrow f_4 = 0,2 \text{ ή } f_4\% = 20. \text{ Από τη σχέση (1): } f_2\% = 10.$$

Γ2. Για τη διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i \\ = (9 - 14)^2 \cdot 0,1 + (11 - 14)^2 \cdot 0,1 + (13 - 14)^2 \cdot 0,3 + (15 - 14)^2 \cdot 0,2 + (17 - 14)^2 \cdot 0,3 \\ = 6,6$$

$$\text{Δηλαδή: } s^2 = 6,6 \Leftrightarrow s = \sqrt{6,6} \approx 2,57$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Επομένως:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \cdot 100\% = \frac{2,57}{14} \cdot 100\% = 18,357\% > 10\%$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3.

Από τον τύπο για τον υπολογισμό της μέσης τιμής έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{x} = 14 &\Leftrightarrow \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i = 14 \Leftrightarrow \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i + x_5 \cdot v_5 \right) = 14 \\ &\Leftrightarrow \frac{1780}{v} + 17 \cdot f_5 = 14 \Leftrightarrow v = 200 \end{aligned}$$

Γ4.

Για κάθε $i = 1, \dots, 5$ είναι: $\beta_i = \frac{1}{s_a} \alpha_i - \frac{\bar{a}}{s_a}$

Από την εφαρμογή 3 στη σελίδα 99 του σχολικού βιβλίου γνωρίζουμε ότι:

$$\bar{\beta} = \frac{1}{s_a} \bar{\alpha} - \frac{\bar{a}}{s_a} = 0 \text{ και } s_{\beta} = \left| \frac{1}{s_a} \right| s_a = 1.$$

Η απόδειξη των παραπάνω γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \beta_i = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{s_a} (\alpha_i - \bar{a}) = \frac{1}{s_a} \cdot \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (\alpha_i - \bar{a}) = \frac{1}{s_a} \cdot \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 \alpha_i - 5 \bar{a} \right) \\ &= \frac{1}{s_a} \cdot \left(\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \alpha_i - \bar{a} \right) = \frac{1}{s_a} \cdot (\bar{\alpha} - \bar{a}) = 0 \end{aligned}$$

και

$$s_{\beta}^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (\beta_i - \bar{\beta})^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \beta_i^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{s_a} (\alpha_i - \bar{a}) \right)^2 = \frac{1}{s_a^2} \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (\alpha_i - \bar{a})^2 \frac{1}{s_a^2} s_a^2 = 1$$

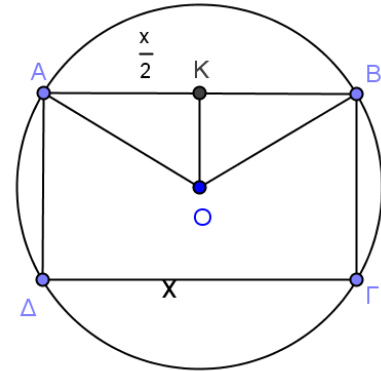
ΜΕΘΟΔΙΚΟ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε την ακτίνα $OA = \rho = 5$ και το απόστημα $OK = \frac{A\Delta}{2}$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο OKA παίρνουμε:

$$(OA)^2 = (AK)^2 + (OK)^2 \Leftrightarrow 25 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{A\Delta}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (A\Delta)^2 = 100 - x^2 \text{ όπου } 0 < x < 2\rho = 10 \text{ εφόσον το ορθογώνιο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο.}$$



Επομένως: $(A\Delta) = \sqrt{100 - x^2}$ με $0 < x < 10$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η διαγώνιος AG είναι διάμετρος του κύκλου αφού η εγγεγραμμένη $A\hat{B}G$ είναι ορθή (άρα βαίνει σε ημικύκλιο) και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABG .

Για τη συνάρτηση $f(x)$ που δίνει το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ έχουμε:

$$f(x) = (AB) \cdot (A\Delta) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$$

Δ2. Η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,10)$ με

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} \cdot (100 - x^2)'$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \sqrt{100 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{100 - x^2}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

Λύνουμε την εξίσωση:

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in (0, 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100 - 2x^2 = 0 \\ x \in (0, 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 50 \\ x \in (0, 10) \end{cases} \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$$

$$\text{Επίσης, } f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 100 - 2x^2 > 0 \\ x \in (0, 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 50 \\ x \in (0, 10) \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 5\sqrt{2}$$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας ακροτάτων:

x	0	$5\sqrt{2}$	10
$f'(x)$		+	-
f		↗	↘

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο για $x = 5\sqrt{2}$, άρα το παραλληλόγραμμο έχει για $x = 5\sqrt{2}$ μέγιστο εμβαδό.

Για $x = (AB) = 5\sqrt{2}$ είναι $(AD) = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2} = x$. Συνεπώς, το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Δ3. Για το όριο έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{98} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \frac{1}{98} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} \\ &= \frac{1}{98} f'(1) = \frac{1}{98} \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου στο σημείο $x_0 = 1$: $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x}$

Δ4. Για ενδεχόμενα A, B γνωρίζουμε ότι $A - B \subseteq A$ οπότε:

$$0 < P(A - B) \leq P(A) < 5\sqrt{2}, \text{ εφόσον } A \cap B \neq \emptyset.$$

Στο διάστημα αυτό η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, οπότε παίρνουμε:

$$\begin{aligned}f(P(A - B)) \leq f(P(A)) &\Leftrightarrow P(A - B) \sqrt{100 - (P(A - B))^2} \leq P(A) \sqrt{100 - (P(A))^2} \\ \Leftrightarrow \frac{P(A - B)}{\sqrt{100 - (P(A))^2}} &\leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - (P(A - B))^2}} \quad (1)\end{aligned}$$

$$\text{Έχουμε: } 0 < P(A - B) \leq P(A) < 5\sqrt{2}$$

$$\text{Οπότε: } 0 < P^2(A - B) \leq P^2(A) < 1 \text{ και}$$

$$99 < 100 - P^2(A) \leq 100 - P^2(A - B) \Leftrightarrow 1 < \sqrt{100 - P^2(A)} \leq \sqrt{100 - P^2(A - B)} < \sqrt{99} \quad (2)$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας και τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$0 < \frac{P(A - B)}{\sqrt{100 - (P(A))^2}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - (P(A - B))^2}} < \frac{P(A)}{\sqrt{99}} \leq \frac{1}{\sqrt{99}} < 5\sqrt{2}$$

Στο διάστημα $(0, 5\sqrt{2}]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:

$$f\left(\frac{P(A - B)}{\sqrt{100 - (P(A))^2}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - (P(A - B))^2}}\right)$$

Επιμέλεια:

Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Χρήστος Αναστασίου, Μάριος Παπαδιαμαντής,
Αλέξανδρος Φιτσόπουλος, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Κωνσταντίνα Μωραΐτη, Ηρώ Μαρκάκη

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999
Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

www.methodiko.net