

Θέμα Α

A1. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **262 (i)**

A2. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **141**

A3. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **246-247**

A4. α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Σωστό

Θέμα Β

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right)' = \dots = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{Λύνουμε την εξίσωση } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Λύνουμε την ανίσωση } f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Αντίστοιχα: } f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Το πρόσημο της πρώτης παραγώγου και η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f			

ολικό
ελάχιστο

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$.

ΜΕΘΟΔΙΚΟ






B2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με:

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{(x^2+1)^2} \right)' = \dots = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$\text{Λύνουμε την εξίσωση } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Λύνουμε την ανίσωση } f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3} > 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
$f''(x)$	-	○	+	○	-
f					

Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ και $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$.

Η f είναι κυρτή στο $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$.

Η f παρουσιάζει σημεία καμπής $A(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f(-\frac{\sqrt{3}}{3}))$ με $A(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4})$ και

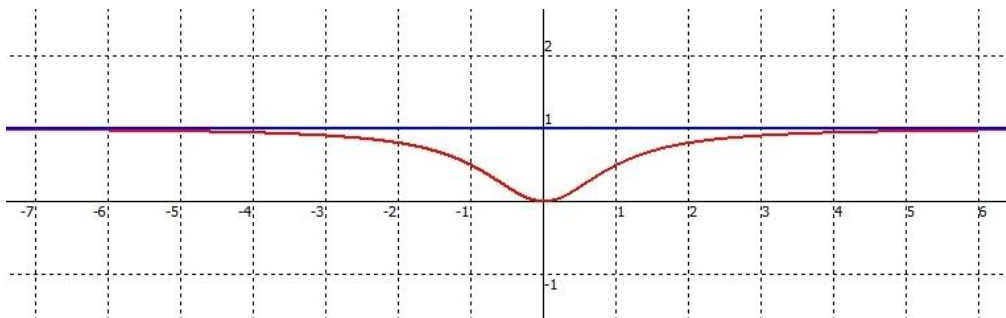
$B(\frac{\sqrt{3}}{3}, f(\frac{\sqrt{3}}{3})) = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4})$ αφού η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτών και ορίζεται εφαπτομένη στα σημεία αυτά.

B3. Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} ως ηλίκο συνεχών και δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Βρίσκουμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ και ομοίως προκύπτει $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

Συνεπώς η γραφική παράσταση της f έχει στο $+\infty$ και στο $-\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$.

B4.



ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Θέμα Γ

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει προφανή ρίζα τη $x = 0$, αφού $f(0) = e^0 - 1 = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 2x(e^{x^2} - 1)$.

Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $e^{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

και κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2x$	-	○	+
$e^{x^2} - 1$	+	○	+
$f'(x)$	-	○	+

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	○	+
f			

ολικό
ελάχιστο

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Για $x = 0$ η f έχει ολικό ελάχιστο το $y = f(0) = 0$.

Επομένως για $x < 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$,

και για $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

Διαφορετικά, γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^x \geq x + 1 \text{ με την ισότητα να ισχύει για } x = 0.$$

Αντικαθιστώντας όπου x το x^2 προκύπτει ότι: $e^{x^2} \geq x^2 + 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$f(x) \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Γ2. Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} . Η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι ισοδύναμη με την $f^2(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ και λόγω του ερωτήματος **Γ1** η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

Επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Έχουμε: $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$

$$\sqrt{f^2(x)} = \sqrt{(e^{x^2} - x^2 - 1)^2}$$

$$|f(x)| = |e^{x^2} - x^2 - 1|$$

Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ ισχύει είτε $f(x) < 0$ οπότε: $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

είτε $f(x) > 0$ οπότε: $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$.

Αντίστοιχα στο διάστημα $(0, +\infty)$ ισχύει είτε $f(x) < 0$ οπότε: $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

είτε $f(x) > 0$ οπότε: $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω περιπτώσεις, όλες οι συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την παραπάνω συνθήκη είναι οι εξής:

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ή } f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1), x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ή } f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & \text{αν } x \geq 0 \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1), & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{ή } f(x) = \begin{cases} -(e^{x^2} - x^2 - 1), & \text{αν } x \geq 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Γ3. Η f είναι 3 φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f'(x) = 2x(e^{x^2} - 1)$$

$$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} - 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } f'''(x) = (2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} - 2)' = \dots = 4x e^{x^2} (2x^2 + 3), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Λύνω την εξίσωση: } f'''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x e^{x^2} (2x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

και αντίστοιχα την ανίσωση:

$$f'''(x) > 0 \Leftrightarrow 4x e^{x^2} (2x^2 + 3) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας προσήμων

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'''	$-$	0	$+$
f''	$>$	$=$	$>$

Επειδή η f'' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, προκύπτει ότι:

$$f''(x) > 0, \text{ για κάθε } x < 0$$

Επειδή η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, προκύπτει ότι:

$$f''(x) > 0, \text{ για κάθε } x > 0$$

Επίσης είναι: $f''(0) = 0$.

Επομένως, $f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και η f είναι κυρτή στο \mathbb{R} .

Διαφορετικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

$f''(x) = 2(e^{x^2} - 1) + 4x^2 e^{x^2} \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, αφού ισχύει: $e^{x^2} - 1 \geq 0$ και $4x^2 e^{x^2} \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει σε κάθε περίπτωση μόνο για $x = 0$. Άρα, η f είναι κυρτή στο \mathbb{R} .

Γ4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = f(x+3) - f(x), x \in [0, +\infty)$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $g'(x) = f'(x+3) - f'(x)$.

Από το ερώτημα Γ3, f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x > 0$ έχουμε: $x < x+3 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x+3)$, αφού f' γνησίως αύξουσα

Άρα: $g'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$. Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα έχει την ιδιότητα 1-1.

Επίσης, $|\eta\mu x| + 3 > 0$ και συνεπώς ορίζεται η σύνθεση $g(|\eta\mu x| + 3)$ στο $[0, +\infty)$ και η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x) \quad (1)$$

ισοδύναμα γράφεται:

$$g(|\eta\mu x|) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow |\eta\mu x| = x$$

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999
Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

www.methodiko.net

$$\Leftrightarrow x = 0$$

αφού γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει:

$$|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow |\eta\mu x| \leq x \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνο για } x = 0.$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

Θέμα Δ

Δ1. Ισχύει ισοδύναμα:

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta\mu x \, dx = \pi$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) \cdot \eta\mu x \, dx + \int_0^\pi (f'(x))' \eta\mu x \, dx = \pi$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) \cdot \eta\mu x \, dx + [f'(x) \cdot \eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = \pi$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) \cdot \eta\mu x \, dx + 0 - [f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x]_0^\pi - \int_0^\pi f(x) \cdot \eta\mu x \, dx = \pi$$

$$\Leftrightarrow f(\pi) + f(0) = \pi \quad (1)$$

Για τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x}$ ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$

Είναι: $f(x) = \eta\mu x \cdot h(x)$ κοντά στο $x = 0$, οπότε: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ αφού η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

Τελικά η (1) γίνεται: $f(\pi) = \pi$.

Επιπλέον έχουμε:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{\eta\mu x}}{\frac{x}{\eta\mu x}} = 1$$

2ος τρόπος

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu x} \stackrel{DLH}{=} f'(0) = 1$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Δ2.

α) Υποθέτουμε ότι η f παρουσιάζει ένα τουλάχιστον τοπικό ακρότατο στη θέση $x_0 \in \mathbb{R}$. Επειδή είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , από το Θεώρημα Fermat ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) ισχύει:

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x = x_0 \text{ δίνει: } e^{f(x_0)} \cdot f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + e^{x_0}$$

$$\Leftrightarrow e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0, \text{ χρησιμοποιώντας ότι: } f'(x_0) = 0$$

Δηλαδή $f'(0) = 0$. **Άτοπο**

Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο \mathbb{R} .

β) Ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η f' είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Άρα η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} ,

Δηλαδή η f είναι γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} .

Επειδή $f'(0) = 1 > 0$ ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Δ3. Για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\left| \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right| = \frac{|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \leq \frac{|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \leq \frac{2}{|f(x)|}$$

Δηλαδή:

$$-\frac{2}{|f(x)|} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{|f(x)|} \quad (1)$$

Επειδή: $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και συνεχής ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{οπότε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Από τη σχέση (1) και με χρήση του κριτηρίου παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Δ4.

Είναι:

$$\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx \quad (2)$$

Θέτουμε: $u = \ln x$ επομένως: $du = \frac{1}{x} dx$ και για τα άκρα της ολοκλήρωσης παίρνουμε:

- για $x = 1$, $u = 0$
- για $x = e^\pi$, $u = \pi$

$$(2) = \int_0^\pi f(u) du = \int_0^\pi f(x) dx$$

Για κάθε: $0 \leq x \leq \pi$ είναι $f(0) \leq f(x) \leq f(\pi)$, αφού $f \uparrow$ στο \mathbb{R}

Δηλαδή: $0 \leq f(x) \leq \pi$

Επομένως:

- $f(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) dx > 0 \quad (3)$$

- και ακόμη: $\pi - f(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi (\pi - f(x)) dx > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) dx < \int_0^\pi \pi dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) dx < [\pi x]_0^\pi$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) dx < \pi^2 \quad (4)$$

Άρα από τις (3) και (4) παίρνουμε: $0 < \int_0^\pi f(x) dx < \pi^2$

Επιμέλεια:

Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Χρήστος Αναστασίου, Μάριος Παπαδιαμαντής,
Αλέξανδρος Φιτσόπουλος, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Κωνσταντίνα Μωραΐτη, Δημήτρης
Κότσιρας, Ηρώ Μαρκάκη

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999
Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

www.methodiko.net