

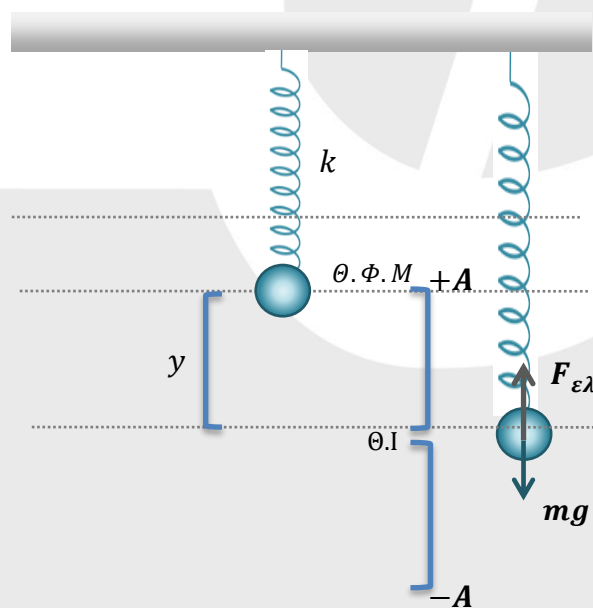
## ΘΕΜΑ Α

A1.  $\delta$    A2.  $\gamma$    A3.  $\alpha$    A4.  $\delta$

A5. α) Λάθος   β) Σωστό   γ) Σωστό   δ) Σωστό   ε) Λάθος

## ΘΕΜΑ Β

B1.



Βρίσκουμε τη Θέση Ισορροπίας της ταλάντωσης:

Στη Θέση Ισορροπίας  $\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = W \Rightarrow k \cdot y = mg \Rightarrow y = \frac{mg}{k}$  είναι η απόσταση από τη θέση φυσικού μήκους έως τη Θέση Ισορροπίας της ταλάντωσης.

Επειδή το σώμα αφήνεται χωρίς ταχύτητα στην Θ.Φ.Μ, η Θ.Φ.Μ είναι ακραία θέση για την Α.Α.Τ. Οπότε  $y = A = \frac{mg}{k}$ .

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Η μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του ελατηρίου επιτυγχάνεται στην κάτω ακραία θέση της Α.Α.Τ. όπου η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι:

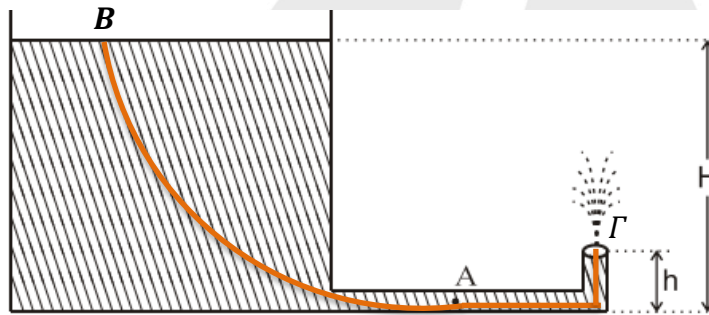
$$2A = \frac{2mg}{k}$$

$U_{max} = \frac{1}{2}k \cdot (2A)^2$  γιατί η μέγιστη απόσταση από τη θέση φυσικού μήκους θα είναι  $2A$ .

$$\text{Άρα } U_{max_{ελ}} = \frac{1}{2}k \cdot 4A^2 = \frac{1}{2}k \cdot 4 \cdot \left(\frac{mg}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}k \cdot 4 \cdot \frac{m^2 \cdot g^2}{k^2} = \frac{2m^2 \cdot g^2}{k}$$

**Σωστό το ii**

**B2.**



Από την εξίσωση συνέχειας προκύπτει:

$$\Pi_A = \Pi_\Gamma \Rightarrow A_A \cdot v_A = A_\Gamma \cdot v_\Gamma \Rightarrow v_A = v_\Gamma$$

όπου  $A_A, A_\Gamma$  τα εμβαδά των διατομών στα σημεία A και Γ και  $v_A, v_\Gamma$  οι αντίστοιχες ταχύτητες.

Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου B και του σημείου Γ, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας στον πυθμένα του δοχείου, έχουμε:

$$P_{ατμ} + \frac{1}{2} \rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot H = P_{ατμ} + \frac{1}{2} \rho \cdot v_\Gamma^2 + \rho \cdot g \cdot \frac{H}{5} \quad (1)$$

Καθώς οι πιέσεις στα B και Γ είναι ίσες με την ατμοσφαιρική και  $v_B = 0$ ,

Η (1) γίνεται:

$$\rho \cdot g \cdot 5h = \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \rho \cdot v_\Gamma^2$$

$$\Rightarrow 4 \rho \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \rho \cdot v_A^2$$

$$\Rightarrow 8gh = v_A^2 \Rightarrow v_A = 2 \cdot \sqrt{2gh}$$

**Σωστό το iii**

Μεθοδικό Φροντιστήριο

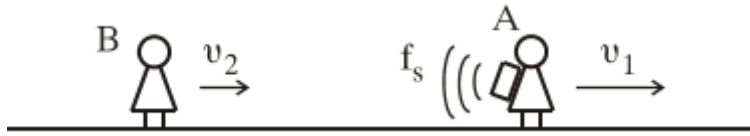
Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999  
Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

[www.methodiko.net](http://www.methodiko.net)

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

B3.

Από τον τύπο του φαινομένου Doppler ο παρατηρητής B πλησιάζει και η πηγή απομακρύνεται.



$$f_B = \frac{v_{\eta\chi} + v_2}{v_{\eta\chi} + v_1} \cdot f_s \text{ και}$$

$$f_B = \frac{v_{\eta\chi} + \frac{v_{\eta\chi}}{10}}{v_{\eta\chi} + \frac{v_{\eta\chi}}{5}} \cdot f_s$$

$$f_B = \frac{\frac{11}{10} \cdot v_{\eta\chi}}{\frac{5}{5} \cdot v_{\eta\chi}} \cdot f_s \Rightarrow f_B = \frac{11 \cdot 5}{10 \cdot 6} \cdot f_s$$

$$f_B = \frac{11}{12} \cdot f_s$$

Σωστό το ii

## ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι  $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 0,8 \text{ sec}$ .

Σε χρόνο ίσο με  $\frac{T}{2}$  το κύμα έχει διαδοθεί κατά  $\frac{\lambda}{2}$ , οπότε  $\lambda = 8 \text{ cm}$ .

Επίσης, από την ενέργεια ταλάντωσης έχουμε:

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \Leftrightarrow \frac{2E}{m \omega^2} = A^2 \Leftrightarrow \frac{10 \pi^2 \cdot 10^{-7}}{10^{-6} \cdot 2,5^2 \pi^2} = A^2 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2,5} \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

Άρα το πλάτος ταλάντωσης είναι  $A = 0,4 \text{ m}$

Γ2. Η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι:

$$y = 0,4 \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{0,8} - \frac{x}{8} \right) \text{ με } y \text{ σε } m, x \text{ σε } cm, t \text{ σε } sec$$

Τη χρονική στιγμή  $t_1 = 1,4 \text{ sec}$  το κύμα έχει διαδοθεί κατά  $x = vt$ , με ταχύτητα

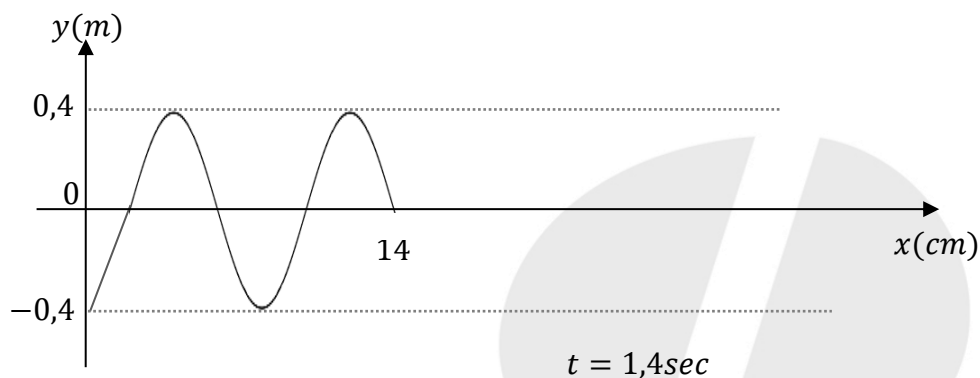
# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

$$v = \lambda \cdot f = \frac{8}{0,8} = 10 \text{ cm/sec.}$$

$$\text{Άρα } x = 10 \cdot 1,4 = 14 \text{ cm}$$

$$\text{Σε αυτό το μήκος υπάρχουν } N = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4} = 1,75 \text{ κύματα.}$$

Το στιγμιότυπο του κύματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



**Γ3.** Εφαρμόζω την ΑΔΜΕ για την ταλάντωση της στοιχειώδους μάζας.

$$\frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 + K \Rightarrow$$

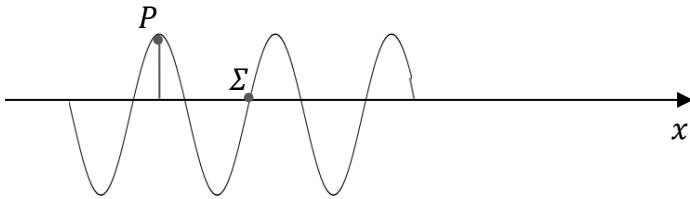
$$\frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - y^2) = K$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} 10^{-6} 2,5^2 \pi^2 \left( \frac{16}{100} - \frac{4}{100} \right) = K$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} 10^{-6} 2,5^2 \pi^2 \frac{K}{10^2} = K \Rightarrow 6 \cdot 2,5^2 \pi^2 \cdot 10^{-8} = K$$

$$\Rightarrow 37,5 \pi^2 \cdot 10^{-8} \text{ J} = K$$

Γ4.



Είναι  $\varphi_P - \varphi_\Sigma = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \Delta x = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \Rightarrow \Delta x = \frac{3\lambda}{4}.$$

Όπως φαίνεται από το στιγμιότυπο  $y_\Sigma = 0$ .

Αν  $y_P = +A$  τότε ισχύει:

$$+A = +A\eta\mu\varphi_P \Rightarrow \varphi_P = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Άρα } \varphi_\Sigma = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = 2k\pi - \pi$$

Οπότε  $v_\Sigma = \omega A \sin(2k\pi - \pi) = -\omega A = -v_{max}$

Τέλος,  $v_\Sigma = -2,5\pi \cdot 0,4 = -\pi \frac{m}{sec}$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Το σημείο Z συνδέεται με το σημείο Γ. Άρα,  $\Delta s_z = \Delta s_\Gamma$ . Όμως το σημείο Γ είναι ακίνητο, οπότε:  $\Delta s_z = 0$ . Ο δίσκος εκτελεί σύνθετη κίνηση, οπότε για το σημείο Z ισχύει:

$$ds_z = ds_{cm} - R \cdot d\theta$$

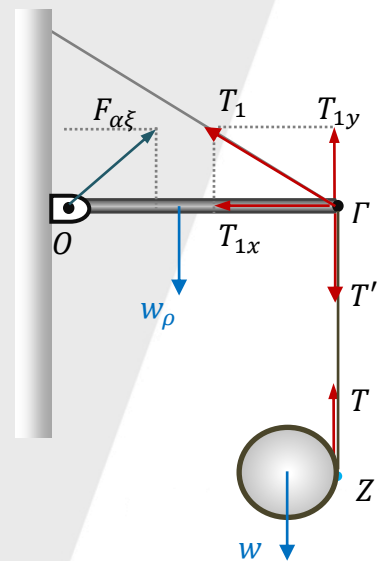
Καθώς  $ds_z = 0$  προκύπτει:  $ds_{cm} = R \cdot d\theta$ . Άρα για τις ταχύτητες θα ισχύει:  $v_{cm} = \omega \cdot R$  και για τις επιταχύνσεις:  $a_{cm} = a_\gamma \cdot R$ .

Ο δίσκος δέχεται το βάρος  $w$  στο κέντρο μάζας και την τάση του νήματος στο Z. Εφαρμόζοντας το 2<sup>ο</sup> Νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική και τη μεταφορική κίνηση του δίσκου:

Μεταφορική:  $\Sigma F_y = m \cdot a_{cm} \Rightarrow w - T = m \cdot a_{cm}$   
 $\Rightarrow mg - T = m \cdot a_{cm} \quad (1)$

Περιστροφική:  $\Sigma \tau = I \cdot a_\gamma \Rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot a_\gamma$

Καθώς,  $a_{cm} = R \cdot a_\gamma$  προκύπτει:  $T \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot R \cdot a_{cm} \Rightarrow T = \frac{1}{2} m \cdot a_{cm} \quad (2)$



# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Αθροίζοντας τις (1) και (2) παίρνουμε:  $m g = \frac{3}{2} m \cdot a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{2g}{3} \Rightarrow a_{cm} = \frac{20}{3} \text{ m/s}^2$

**Δ2.** Το άκρο Γ δέχεται τη δύναμη  $T$ , από το νήμα -που είναι συνδεδεμένο με το δίσκο- που είναι ίση κατά μέτρο και αντίθετη κατά κατεύθυνση με την  $T$  καθώς το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό. Άρα:  $T' = T$ .

Από τη σχέση (2):  $T' = T = \frac{1}{2} m \cdot a_{cm} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{20}{3} \text{ N}$ .

Επίσης, η ράβδος δέχεται στο άκρο Γ τη δύναμη  $T_1$  από το νήμα ΓΔ, το βάρος της και τη δύναμη  $F_{αρ}$  από την άρθρωση.

Η ράβδος ισορροπεί άρα ως προς το άκρο Α για τις αλγεβρικές τιμών των ροπών ισχύει:  $\Sigma \tau = 0 \Rightarrow \tau_{T'} + \tau_{T_1} + \tau_{w\rho} + \tau_{F_{αρ}} = 0$

Θεωρώντας θετική φορά αντίθετη από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού έχουμε:

$$-T' \cdot (AG) - w\rho \cdot \frac{AG}{2} + T_{1y} \cdot (AG) + 0 = 0, \text{ όπου } T_{1y} = T_1 \cdot \eta\mu\phi$$
$$-\frac{20}{3} - \frac{40}{2} + T_1 \cdot \eta\mu\phi = 0 \Rightarrow T_1 \cdot 0,8 = \frac{80}{3} \Rightarrow T_1 = \frac{100}{3} \text{ N}$$

**Δ3.** Από τη στιγμή που κόβεται το νήμα και μετά, ο δίσκος δέχεται μόνο το βάρος, το οποίο καθώς ασκείται στο  $cm$  δε δημιουργεί ροπή. (Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.)

Άρα,  $\Sigma \tau = 0$ . Ως εκ τούτου η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου μετά το κόψιμο του νήματος διατηρείται σταθερή.

Η στροφορμή του δίσκου είναι:  $L = I \cdot \omega = \frac{1}{2} mR^2 \cdot \omega$ .

Λόγω της σχέσης  $v_{cm} = \omega \cdot R$  προκύπτει:  $L = I \cdot \omega = \frac{1}{2} mR \cdot v_{cm}$

Το  $cm$  του δίσκου εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, άρα:

$$h_1 = \frac{1}{2} a_{cm} \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{a_{cm}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{3}{10}}{\frac{20}{3}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9}{200}} = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10} = 0,3 \text{ s}$$

Όπου  $t_1$  η στιγμή που κόβεται το νήμα. Οπότε:

$$v_{cm_1} = a_{cm} \cdot t_1 = \frac{20}{3} \cdot \frac{3}{10} = 2 \text{ m/s}$$

Τελικά η στροφορμή τη στιγμή που κόβεται το νήμα είναι:

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

$$L = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,1 \cdot 2 = 0,2 \text{ Kg m}^2/\text{s}$$

και άρα είναι η ίδια και  $\Delta t$  μετά το κόψιμο του νήματος.

**Δ4.** Η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης μετά το κόψιμο του νήματος είναι σταθερή και ίση με την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης τη στιγμή που κόπηκε το νήμα:

$$K_{\text{ΠΕΡ}} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot mR^2 \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{4} \cdot m \cdot v_{cm_1}^2$$

όπου  $v_{cm_1}$  η ταχύτητα του  $cm$  τη στιγμή που κόβεται το νήμα.

$$\text{Άρα } K_{\text{ΠΕΡ}} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2^2 = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 4 = 2J$$

Μετά το κόψιμο του νήματος το  $cm$  του δίσκου εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα την  $v_{cm_1} = 2m/s$  και επιτάχυνση  $a'_{cm} = g = 10m/s^2$  καθώς ασκείται μόνο το βάρος.

$$\text{Άρα } v'_{cm} = v_{cm_1} + a'_{cm} \cdot \Delta t' = 2 + 10 \cdot 0,1 = 3m/s$$

Οπότε η κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης είναι:

$$K_{\text{ΜΕΤ}} = \frac{1}{2} m \cdot v_{cm}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^2 = 9J$$

$$\text{Άρα } \frac{K_{\text{ΠΕΡ}}}{K_{\text{ΜΕΤ}}} = \frac{2}{9}$$

*Επιμέλεια:*

*Μπάμπης Μπέσης, Στέφανος Μαυρογιώργης, Χαρίλαος Τσαγκαράκης, Αντώνης Παρασκευάς,  
Ιωάννης Τριανταφύλλου*

**Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!**



Για την εύστοχη Συμπλήρωση του Μηχανογραφικού Δελτίου συμβουλευτείτε τη νέα έκδοση του Οδηγού Σπουδών: «ΣΠΟΥΔΕΣ & ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΑ 2017».

Όλες οι απαραίτητες πληροφορίες για τις Σχολές, τις Σπουδές και τα Επαγγέλματα!

Περισσότερες πληροφορίες στην ιστοσελίδα του ΜΕΘΟΔΙΚΟΥ: [www.methodiko.net](http://www.methodiko.net)