

Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού,**

Θετικών & Οικονομικών Σπουδών

Ημερομηνία: 17 Ιουνίου 2020

Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

A1. Απόδειξη του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών (σελ.76 σχολικού βιβλίου)

A2. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου (σελ. 104)

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο $(α, β)$ και επιπλέον ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

A3.

α. Ψευδής

β. Η συνάρτηση $f(x) = x^3$, είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ με $f'(0) = 0$. Ενώ δηλαδή υπάρχει ένα σημείο μηδενισμού της παραγώγου η f είναι γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} .

(Σελίδα 136 Σχολικού βιβλίου)

A4.

- α. Λάθος
- β. Σωστό
- γ. Σωστό
- δ. Σωστό
- ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Η συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$$

Τελικά $D_{f \circ g} = (0, +\infty)$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Ο τύπος είναι: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{e^x+2}{e^x-1}$ για κάθε $x > 0$

B2. Η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$(f \circ g)'(x) = \frac{e^x(e^x-1) - (e^x+2)e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - 2e^x}{(e^x-1)^2} = -\frac{3e^x}{(e^x-1)^2}, \text{ για κάθε } x > 0$$

Ισχύει $(f \circ g)'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$

Συνεπώς η $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

Άρα είναι και $1 - 1$ οπότε ορίζεται η $(f \circ g)^{-1}$.

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της $(f \circ g)^{-1}$, βρίσκουμε το σύνολο τιμών της $(f \circ g)^{-1}$

Η $f \circ g$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Άρα $(f \circ g)(A) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((f \circ g)(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} (f \circ g)(x) \right)$ με

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x+2}{e^x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1+\frac{2}{e^x})}{e^x(1-\frac{1}{e^x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{2}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x+2}{e^x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x-1} \cdot (e^x+2) = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$, διότι ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x-1) = 0$ και $e^x > 1$ για $x > 0$.

Τελικά $D_{(f \circ g)^{-1}} = (f \circ g)(D_{f \circ g}) = (1, +\infty)$

Για τον τύπο της $(f \circ g)^{-1}$ θέτουμε $y = \frac{e^x+2}{e^x-1} \Leftrightarrow (e^x-1) \cdot y = e^x+2 \Leftrightarrow$

$$e^x \cdot y - y = e^x + 2 \Leftrightarrow e^x \cdot y - e^x = y + 2 \Leftrightarrow$$

$$e^x(y-1) = y+2 \stackrel{y>1}{\Leftrightarrow} e^x = \frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow$$

$$x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) \text{ με } y > 1$$

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), x > 1$$

B3. Έστω $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), x > 1$

Για κάθε $x > 1$ έχουμε:

$$\varphi'(x) = \left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)' = \frac{x-1}{x+2} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = -\frac{3}{(x+2)(x-1)} < 0$$

Άρα η $\varphi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

B4.

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \right]$$

$$\text{Θέτουμε } u = \frac{x+2}{x-1}$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x+2) \cdot \frac{1}{x-1} \right] = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$$

Συνεπώς αν $x \rightarrow 1^+$ τότε $u \rightarrow +\infty$

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, Τηλ: 210 93 10 320

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Άρα, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$.

Επιπλέον: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+2}{x-1} \right)$

Θέτουμε $u = \frac{x+2}{x-1}$.

Τότε: $u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$

ΘΕΜΑ Γ

Η δοσμένη συνάρτηση έχει τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \lambda \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Γ1. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 0$, ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 1 - \ln \lambda = \lambda \Leftrightarrow \lambda + \ln \lambda - 1 = 0 \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x + \ln x - 1, x > 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, επομένως και $1 - 1$

Τελικά, $(1) \Leftrightarrow g(\lambda) = g(1) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} \lambda = 1$

Γ2. Έχουμε $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - 1 + x}{x(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right) = 1 + 0 = 1$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \in \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$ και ορίζεται η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $A(0,1)$, η οποία σχηματίζει με τον x' γωνία ω ,

τέτοια ώστε $\lambda_\varepsilon = f'(0) = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \stackrel{\omega \in [0, \pi)}{\Leftrightarrow} \omega = \frac{\pi}{4}$

Γ3. Η $f(x) = \frac{1}{1-x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

Η $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{3\pi}{2})$ με $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$.

Άρα είναι:

$$f'(x) = 0 \text{ με } x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1, \text{ αφού } \eta\mu x \neq 0$$

(Αν $\eta\mu x = 0$, τότε $\sigma\upsilon\nu x = 0$. Άτοπο, αφού ισχύει $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$)

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, Τηλ: 210 93 10 320

www.methodiko.net

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Άρα $\varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, με $\kappa \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{5\pi}{4}$, αφού $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$

Είναι και $f'(0) = 1 \neq 0$, οπότε το $x = 0$ δεν είναι κρίσιμο σημείο.

Επειδή τα σημεία $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = \frac{5\pi}{4}$ είναι εσωτερικά σημεία του $A_f = \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right)$ είναι τα μοναδικά κρίσιμα σημεία της f .

Γ4. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(a, f(a))$ με $a \leq 0$ έχει εξίσωση

$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$ όπου $f(a) = \frac{1}{1-a}$ και $f'(a) = \frac{1}{(1-a)^2}$

$$y - \frac{1}{1-a} = \frac{1}{(1-a)^2} \cdot (x - a)$$

Για $y = 0$ δίνει $-\frac{1}{1-a} = \frac{1}{(1-a)^2} \cdot x - \frac{a}{(1-a)^2} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{(1-a)^2} \cdot x = \frac{a}{(1-a)^2} - \frac{1}{1-a} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1-a} \cdot x = \frac{a}{1-a} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-a} \cdot x = \frac{2a-1}{1-a} \Leftrightarrow x = 2a - 1$$

Άρα η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2a - 1, 0)$

Κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ η τετμημένη του B είναι $x_B(t) = 2a(t) - 1$

οπότε $x'_B(t) = 2a'(t) \Leftrightarrow x'_B(t) = -2 \frac{a(t)}{3}$

Για $t = t_0$ δίνει $x'_B(t_0) = -\frac{2a(t_0)}{3} \Leftrightarrow x'_B(t_0) = \frac{2}{3}$, αφού $a(t_0) = -2$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με: $f'(x) = e^x + 2x - e$

Η f' είναι παραγωγίσιμη με:

$$f''(x) = e^x + 2 > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Υπαρξη ρίζας για την $f'(x) = 0$:

[α' τρόπος]

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με

$f(0) = f(1) = 0$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$ (1)

[β' τρόπος]

Αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο \mathbb{R} το σύνολο τιμών της είναι το

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right) = \mathbb{R},$$

όπου

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2x - e) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 2x - e) = +\infty$$

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, Τηλ: 210 93 10 320

www.methodiko.net

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Επομένως το $y = 0$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f' οπότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$ (1).

Είναι: $f'(0) = 1 - e < 0$ και $f'(1) = 2 > 0$.

Άρα: $f'(0) < f'(x_0) < f'(1) \Leftrightarrow 0 < x_0 < 1$, γιατί f' γνησίως αύξουσα.

[γ' τρόπος]

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ με

$f'(0) = 1 - e < 0$ και $f'(1) = 2 > 0$. Δηλαδή ισχύει: $f'(0) \cdot f'(1) < 0$

Συνεπώς, από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον ένας αριθμός $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε: $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$ (1).

Μοναδικότητα ρίζας:

Το x_0 είναι μοναδικό καθώς η συνάρτηση f' είναι γνησίως μονότονη.

Έτσι για $x < x_0$ έχουμε: $f'(x) < f'(x_0) = 0$ και για $x > x_0$ έχουμε: $f'(x) > f'(x_0) = 0$.

Επομένως, έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας-ακροτάτων:

x	0	x_0	1
$f'(x)$		-	+
f		\searrow	\nearrow

O.E.

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = x_0$ το $y = f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1$ (2).

Όμως ισχύει από την (1): $e^{x_0} = e - 2x_0$. Άρα η (2) γράφεται:

$$f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0^2 - (e + 2)x_0 + e - 1.$$

Δ2. [α' τρόπος]

Ισχύει από το ερώτημα Δ1 ότι: $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με το ίσο να ισχύει μόνο για $x = x_0$. Οπότε $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$ κοντά στο x_0

με $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$. Άρα: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$

Είναι: $\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \geq -1$ κοντά στο x_0 , οπότε: $\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \geq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1$ κοντά στο

x_0 . Επειδή: $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \right] = +\infty$ θα είναι και $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \right] = +\infty$, γιατί αν

ισχύει: $g(x) \geq f(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

[β' τρόπος]

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_0$

Άρα, για $x \neq x_0$, ισχύει $f(x) > f(x_0)$ (1)

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, Τηλ: 210 93 10 320

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Έστω $g(x) = \frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$, $x \neq x_0$

Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)-f(x_0)} \cdot \left[1 + (f(x) - f(x_0)) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

Επειδή κοντά στο x_0 ισχύει :

$$f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0, \text{ είναι:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$$

- Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\left| (f(x) - f(x_0)) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \right| = |f(x) - f(x_0)| \cdot \left| \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \right| \leq |f(x) - f(x_0)| = f(x) - f(x_0) \text{ (από σχέση (1))}$$

$$\text{Άρα } -(f(x) - f(x_0)) \leq (f(x) - f(x_0)) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \leq f(x) - f(x_0)$$

και με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[(f(x) - f(x_0)) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left[1 + (f(x) - f(x_0)) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \right] = 1$$

$$\text{Τελικά } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

Δ3. Η ζητούμενη εξίσωση γράφεται: $f(x) + x = x_0 \Leftrightarrow f(x) + x - x_0 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x) = f(x) + x - x_0$, $x \in [x_0, 1]$ που σημαίνει ότι η ζητούμενη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $h(x) = 0$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ και $h(x_0) \cdot h(1) < 0$, αφού:

- $h(x_0) = f(x_0) < f(1) = 0$
- $h(1) = f(1) + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$

Σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (x_0, 1)$ ώστε να ισχύει $h(\rho) = 0$.

Μοναδικότητα ρίζας:

[α' τρόπος]

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(x_0, 1)$ με $h'(x) = f'(x) + 1 > 0$, για κάθε $x \in (x_0, 1)$ από το ερώτημα Δ1. Επομένως, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, 1]$ ως συνεχής στο διάστημα αυτό, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

[β' τρόπος]

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x_0, 1)$ με $\xi \neq \rho$ ώστε να ισχύει $h(\xi) = 0$.

Υποθέτουμε $\rho < \xi$ και έχουμε:

- h συνεχής στο $[\rho, \xi]$.
- h παρ/μη στο (ρ, ξ) με $h'(x) = f'(x) + 1$
- $h(\rho) = h(\xi) = 0$

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999

Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, Τηλ: 210 93 10 320

www.methodiko.net

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Από το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\rho, \xi]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mu \in (\rho, \xi)$ ώστε $h'(\mu) = 0 \Leftrightarrow f'(\mu) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(\mu) = -1 < 0$, που είναι άτοπο, εφόσον $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, 1)$.

Δ4. Από το ερώτημα Δ3 είναι: $f(\rho) = x_0 - \rho < 0$ (3), αφού $\rho \in (x_0, 1)$, οπότε η ζητούμενη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα:

$$f(x_0) > f(\rho) \cdot (f'(\kappa) + 1) \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \frac{f(x_0)}{f(\rho)} < f'(\kappa) + 1 \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{f(\rho)} - 1 < f'(\kappa)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{f(\rho)} < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa), \quad (4)$$

Αλλά η f είναι συνεχής στο $[x_0, \rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, ρ) , επομένως από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_0, \rho)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho}$$

Επομένως από τη σχέση (4) ισοδύναμα έχουμε: $f'(\xi) < f'(\kappa) \Leftrightarrow \xi < \kappa$, λόγω της μονοτονίας της f' που είναι γνησίως αύξουσα, το οποίο ισχύει, γιατί $\kappa \in (\rho, 1)$ και $x_0 < \xi < \rho < \kappa < 1$.

Επιμέλεια:

Βαγγέλης Ράλλης, Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Μάριος Παπαδιαμαντής,
Χρήστος Αναστασίου, Γιάννης Αλεξόπουλος, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Δημήτρης Κότσιρας,
Ιάσοντας Μαρκάκης, Νίκος Αλεξόπουλος, Ηρώ Μαρκάκη

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999
Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300
Ελ. Βενιζέλου 45 Ν.Σμύρνη, Τηλ: 210 93 10 320

www.methodiko.net