

Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού,

Θετικών & Οικονομικών Σπουδών

Ημερομηνία: 6 Ιουνίου 2022

Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 186

A2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 142

A3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 161

A4.

α. Σωστό

β. Σωστό

(Αν ήταν $f(0) = f(1)$ από το Θεώρημα Rolle θα υπήρχε x_0 με $f'(x_0) = 0$. Άτοπο)

γ. Σωστό

δ. Λάθος

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε: $D_f = (-\infty, 1]$ με $f(x) = (x^2 - 1)^2$ και $D_g = [0, +\infty)$

Για να ορίζεται η $h = f \circ g$ πρέπει και αρκεί:

$$\{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \{x \geq 0 \text{ και } \sqrt{x} \leq 1\} = [0, 1]$$

Άρα, $D_h = [0, 1]$ και έχει τύπο:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = [(\sqrt{x})^2 - 1]^2 = (x - 1)^2, x \in [0, 1]$$

B2. Η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και για κάθε $x \in (0, 1)$ με $h'(x) = 2(x - 1) < 0$.

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$, επομένως "1 - 1" και συνεπώς αντιστρέψιμη.

Επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$, έχουμε:

$$h([0, 1]) = [h(1), h(0)] = [0, 1] = D_{h^{-1}}$$

$$\text{Θέτουμε } y = h(x) \Leftrightarrow y = (x - 1)^2$$

Συνεπώς: $\sqrt{y} = |x - 1|$ και επειδή $x \in [0, 1]$, παίρνουμε:

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

$$\sqrt{y} = -x + 1 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y} \Leftrightarrow h^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y}, y \in [0,1]$$

$$\text{Άρα: } h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0,1]$$

B3. Είναι:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

i. Ελέγχουμε αν η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$:

Είναι συνεχής στο $[0,1)$, ως ημίγειο συνεχών συναρτήσεων:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \varphi(1), \text{ επομένως η } \varphi \text{ είναι συνεχής στο } x = 1 \text{ και τελικά συνεχής στο } [0,1]$$

$$\text{Επίσης: } \varphi(0) = 1 \text{ και } \varphi(1) = \frac{1}{2}.$$

Επομένως, $\varphi(0) \neq \varphi(1)$ άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών στο $[0,1]$.

ii. Εφόσον πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών, για κάθε αριθμό η μεταξύ του $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ και $\varphi(0) = 1$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta$.

$$\text{Για κάθε } a \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ έχουμε: } \frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{2} \iff \eta \mu a \uparrow [0, \frac{\pi}{2}] \iff \eta \mu \frac{\pi}{6} < \eta \mu a < \eta \mu \frac{\pi}{2} \iff \frac{1}{2} < \eta \mu a < 1.$$

Συνεπώς, για $\eta = \eta \mu a$ προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ έτσι ώστε $\varphi(x_0) = \eta \mu a$, όπου $\frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x < -1$ είναι: $f'(x) = -2$, επομένως υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$f(x) = -2x + c_1 \text{ για κάθε } x < -1.$$

Για $x > -1$ είναι: $f'(x) = 3x^2 - 1$, επομένως υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$f(x) = x^3 - x + c_2 \text{ για κάθε } x > -1.$$

Όμως: $O(0,0) \in C_f$. Άρα: $f(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$.

Οπότε:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Όμως η f είναι συνεχής στο $x = -1$, άρα:

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \Leftrightarrow 2 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -2$
- $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Τελικά:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Γ2.

ι) Η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι: $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, (1),

όπου $f(x_0) = x_0^3 - x_0$ και $f'(x_0) = 3x_0^2 - 1$, εφόσον $x_0 > -1$.

Οπότε: (1) $\Leftrightarrow y - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(x - x_0)$

Αφού $\Gamma(0, -2) \in C_f$ θα είναι:

$$-2 - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(-x_0)$$

$$\Leftrightarrow -2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^3 = 2$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 1, \text{αφού } x_0 > -1$$

Τελικά, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$y = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2$$

Γ3.

Έστω $M(x(t), y(t))$ η θέση του σημείου M κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ με $x(t) > 2$

και $x'(t) = 2$ μον/s. Το εμβαδό του, ορθογωνίου στο

Γ , τριγώνου είναι: $(MK\Gamma) = \frac{1}{2} (K\Gamma)(KM)$

και για κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση:

$$E(t) = \frac{1}{2} (x(t) - 2) \cdot y(t)$$

$$\Leftrightarrow E(t) = \frac{1}{2} (x(t) - 2)(2(x(t) - 2))$$

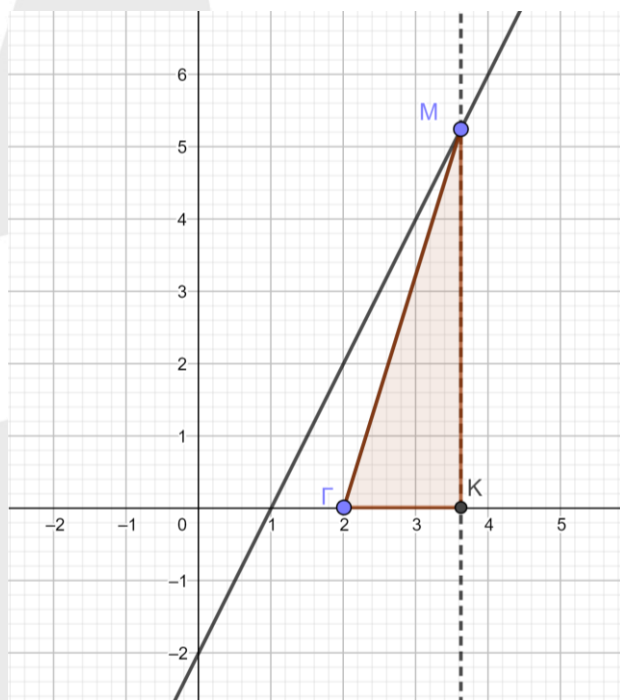
$$\Leftrightarrow E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2, \quad t \geq 0$$

Η $E(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$E'(t) = 2x(t) \cdot x'(t) - 3x'(t) = 4x(t) - 6$$

Τη χρονική στιγμή t_0 ισχύει: $x(t_0) = 3$ άρα

$$E'(t_0) = 6 \text{ τετ. μον./s}$$



Γ4. Ισχύει για $x < 0$:

$$\left| \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{|f(x)|} = \frac{1}{|-2x - 2|} = \frac{1}{2|x + 1|}$$

με

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2|x + 1|} = 0$$

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 0, \quad (1)$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Επίσης, όταν $x \rightarrow -\infty$ είναι για $x < 1 \Leftrightarrow -x > -1$ οπότε:

$$\frac{f(-x)}{1-x^3} = \frac{-x^3+x}{1-x^3} = \frac{x^3-x}{x^3-1}$$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-x}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1, \quad (2)$$

Άρα, τελικά από τις (1) και (2):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right] = 0 + 1 = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Έχουμε την εξίσωση $f(x) = 0$ η οποία γράφεται ισοδύναμα $x - \ln(3x) = 0$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

Έχουμε $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Έτσι, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Έχουμε f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ επομένως

$f((0,1]) = [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)) = [1 - \ln 3, +\infty)$ αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln(3x)) = +\infty$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(3x) = -\infty$.

Επίσης, f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ επομένως

$f([1, +\infty)) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [1 - \ln 3, +\infty)$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(3x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x} \right) = (+\infty)(1 - 0)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x} = 0$ εφαρμόζοντας τον κανόνα

De L' Hospital.

- $0 \in f((0,1])$ (αφού $1 - \ln 3 < 0 \Leftrightarrow \ln e < \ln 3$) άρα υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ με $f(x_1) = 0$ (είναι $x_1 \neq 1$ αφού $f(1) < 0$). Το x_1 είναι μοναδική λύση της $f(x) = 0$ στο $(0,1]$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- $0 \in f([1, +\infty))$ άρα υπάρχει $x_2 \in (1, +\infty)$ με $f(x_2) = 0$ (πάλι είναι $x_2 \neq 1$ αφού $f(1) < 0$). Το x_2 είναι μοναδική λύση της $f(x) = 0$ στο $(1, +\infty)$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Δ2. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(x_1, 0)$ και $(x_2, 0)$ με $x_1 < x_2$.

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Η f είναι συνεχής στο (x_1, x_2) με $x_1 < x_2$ και δε μηδενίζεται επομένως διατηρεί πρόσημο στο (x_1, x_2) . Είναι $1 \in (x_1, x_2)$ και $f(1) < 0$ άρα $f(x) < 0$ στο (x_1, x_2) , οπότε $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$. Έτσι,

$$\begin{aligned} E &= \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx = - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} (x)' f(x) dx = - [x f(x)]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} x f'(x) dx \\ &= - (x_2 f(x_2) - x_1 f(x_1)) + \int_{x_1}^{x_2} x \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = 0 + \int_{x_1}^{x_2} x \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} (x - 1) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2} (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο εμβαδόν.

Δ3. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι $E > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$ άρα $x_1 + x_2 - 2 > 0$ επομένως:

$$x_2 > 2 - x_1$$

Επίσης έχουμε $2 - x_1 > 1 \Leftrightarrow x_1 < 1$ που ισχύει. Επομένως

$$x_2 > 2 - x_1 > 1, \quad (1)$$

και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$ άρα

$$(1) \Leftrightarrow f(x_2) > f(2 - x_1) \Leftrightarrow f(2 - x_1) < 0$$

Δ4. Έχουμε ότι η f είναι κυρτή επομένως η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής. Η εφαπτομένη της f στο σημείο $A(x_2, f(x_2)) = A(x_2, 0)$ είναι η $y - 0 = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$.

Άρα έχουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \geq y$ δηλαδή

$$f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2), \quad (2)$$

Όπου η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_2$.

Επίσης η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση $x = 1$ το οποίο είναι ίσο με $f(1) = 1 - \ln 3$. Επομένως, για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$f(x) \geq 1 - \ln 3, \quad (3)$$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - [f'(x_2)(x - x_2)] = (1 - \ln 3) - f(x), \quad (4)$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Με βάση τα παραπάνω, το αριστερό μέλος της (4) είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 0 (από τη σχέση (2)) και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_2$, ενώ το δεξί μέλος είναι μικρότερο ή ίσο του 0 (από τη σχέση (3)) και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

Επομένως η (4) είναι αδύνατη, αφού $x_2 \neq 1$.

Επιμέλεια:

Βαγγέλης Ράλλης, Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Μάριος Παπαδιαμαντής,
Γιάννης Αλεξόπουλος, Γιάννης Παπαβασιλείου, Παναγιώτης Συνοδινός, Αποστόλης
Κωτσιαρίνης, Κωνσταντίνα Μωραΐτη, Δημήτρης Κότσιρας, Νίκος Αλεξόπουλος, Μαρκάκης
Ιάσοντας, Ηρώ Μαρκάκη

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!

Υπολογισμός Μορίων Πανελλαδικών 2022



Χρησιμοποιήστε την Εφαρμογή για να **υπολογίσετε Μόρια**
για κάθε Πανεπιστημιακό Τμήμα / Σχολή!

Υπολογίστε Μόρια, δείτε τα **Τμήματα Επιτυχίας** (με τις περσινές βάσεις), τις **Ελάχιστες Βάσεις Εισαγωγής** για κάθε Ειδικό Μάθημα και για κάθε Πανεπιστημιακό Τμήμα μέσα από την [ιστοσελίδα](#) του ΜΕΘΟΔΙΚΟΥ ή την Android Εφαρμογή: [mobile app](#)