Πανελλαδικές Εξετάσεις Επαγγελματικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά (Άλγεβρα)**

Ημερομηνία: **3 Ιουνίου 2023**

Απαντήσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 30

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 22

Α3. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό

δ. Λάθος **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 6x^2 + 2ax - 12, \ \ x \in \mathbb{R}$

Β2. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, επομένως: $f'(1) = 0$

Είναι $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 + 2a - 12 = 0 \Leftrightarrow 2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$

Β3. Για $α = 3$ είναι $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$ και $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$

Λύνουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 1$

και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 1$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$	-2		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = -2$, το $f(-2) = 22$

και τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$ το $f(1) = 3$.

Β4. Είναι

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{6(x^2+x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{6(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}6(x+2) = 6 \cdot 3 = 18$$

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

	x_i	ν_i	$x_i \cdot \nu_i$
$[8,12)$	10	20	200
$[12,16)$	14	15	210
$[16,20)$		ν_3	
$[20,24)$		5	
Σύνολο			

Οι κεντρικές τιμές των δύο τελευταίων κλάσεων είναι $x_3 = \frac{16+20}{2} = 18$ και $x_4 = \frac{20+24}{2} = 22$

Γ1. Για τη μέση τιμή των παρατηρήσεων έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 + x_4\nu_4}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4} \Leftrightarrow 14 = \frac{200 + 210 + 18\nu_3 + 110}{40 + \nu_3}$$

$$\Leftrightarrow 14(40 + \nu_3) = 520 + 18\nu_3 \Leftrightarrow 560 + 14\,\nu_3 = 520 + 18\,\nu_3$$

$$\Leftrightarrow 4\,\nu_3 = 40 \Leftrightarrow \nu_3 = 10$$

Γ2. Το μέγεθος του δείγματος είναι: $N = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 50$

και για το άθροισμα είναι $\sum_{i=1}^{4} x_i\nu_i = \bar{x} \cdot N = 700$. Οπότε ο πίνακας γίνεται:

	x_i	ν_i	$x_i \cdot \nu_i$
$[8,12)$	10	20	200
$[12,16)$	14	15	210
$[16,20)$	18	10	180
$[20,24)$	22	5	110
Σύνολο		**50**	**700**

Γ3. Για τον υπολογισμό της διακύμανσης έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{50}[(x_1 - \bar{x})^2\nu_1 + \cdots + (x_5 - \bar{x})^2\nu_5]$$

$$\Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{50}((10-14)^2 \cdot 20 + (14-14)^2 \cdot 15 + (18-14)^2 \cdot 10 + (22-14)^2 \cdot 5)$$

$$\Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{50} \cdot 800$$

$$\Leftrightarrow s^2 = 16$$

Γ4. Είναι: $s = 4$
Ο συντελεστής μεταβολής είναι :

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} > \frac{1}{10}$$

Πράγματι

$$\frac{2}{7} = \frac{20}{70} > \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$$

Άρα το δείγμα **δεν είναι ομοιογενές**.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f ορίζεται για $x \neq 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' \Leftrightarrow f'(x) = (-x^{-2})' \Leftrightarrow f'(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

Για $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και για $x < 0$ είναι $f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$.

Δ2. Έχουμε:

$$-4 \leq x \leq -1 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 16 \Leftrightarrow \frac{1}{16} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{x^2} \leq -\frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$$

Δ3. Για την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ έχουμε: $f(1) = -1$ και $f'(1) = 2$. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y + 1 = 2\,(x - 1) \;\Leftrightarrow y = 2x - 3$

Δ4. Τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ ανήκουν στην ευθεία $y = 2x - 3$ και ισχύει:

$\bar{x} = 4$ και $s_x = 2$, οπότε, σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου ισχύει ότι

$\bar{y} = 2\bar{x} - 3 = 8 - 3 = 5$ και $s_y = s = 2$.

Τελικά για το συντελεστή μεταβολής του δείγματος των τεταγμένων έχουμε:

$$CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!