ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Πανελλαδικές Εξετάσεις Επαγγελματικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά (Άλγεβρα)**

Ημερομηνία: **1η Ιουνίου 2024**

Απαντήσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα **31** (**«Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) + g(x)$»**)

Α2. **α)** Σχολικό βιβλίο, σελίδα **65** (**«ορισμός της συχνότητας v_i»**)

β) Σχολικό βιβλίο, σελίδα **87** (**«ορισμός του σταθμικού μέσου»**)

Ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \cdots + w_\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$$

Α3. **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = x^2 - 6x + 5$

Β2. Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$ με $\Delta = 16$ και $x_1 = \frac{6+4}{2} = 5, x_2 = \frac{6-4}{2} = 1$.
Λύνουμε την ανίσωση: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 > 0$ οπότε $x < 1$ ή $x > 5$. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 5]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[5, +\infty)$.
Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = 1$ το $y = f(1) = \frac{1}{3} - 3 + 5 + \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = 5$ το $y = f(5) = \frac{125}{3} - 3 \cdot 25 + 25 + \frac{1}{3} = 42 - 50 = -8$

Β3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $K(0, f(0))$ θα είναι η ευθεία με εξίσωση:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - \frac{1}{3} = 5x \Leftrightarrow y = 5x + \frac{1}{3}$$

Β4. Εφόσον η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) = 1 + 6 + 5 = 12$$

Σύντομα ακολουθούν οι απαντήσεις και στα υπόλοιπα ερωτήματα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για την τυπική απόκλιση έχουμε:

$$s=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+7)}{2}=\frac{8}{2}=4$$

Γ2. Γνωρίζουμε όμως ότι:

$$CV=\frac{s}{|\bar{x}|}\Leftrightarrow\frac{20}{100}=\frac{4}{|\bar{x}|}\Leftrightarrow|\bar{x}|=20$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος όπου έχουμε τις 4 από τις 5 τιμές $(22, 18, (20+\kappa), 14{,}16)$ και είναι θερμοκρασίες σε ${}^{0}C$ πρωινή ώρα σε πόλεις της Ελλάδας, συμπεραίνουμε ότι $\bar{x}>0$, άρα: $\bar{x}=20$.

Γ3. Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής έχουμε:

$$\bar{x}=\frac{22+18+(20+\kappa)+14+16}{5}\Leftrightarrow 20=\frac{90+\kappa}{5}\Leftrightarrow\kappa=10$$

Επομένως, οι παρατηρήσεις διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά είναι: 14, 16, 18, 22, 30

οπότε η διάμεσος είναι: $\delta=x_3=18$.

Γ4. Αν οι παρατηρήσεις (x_i, $i=1,2,\dots 5$) αυξηθούν κατά 10%, τότε οι νέες παρατηρήσεις θα δίνονται από τον τύπο: $y_i=x_i+\frac{10}{100}x_i\Leftrightarrow y_i=x_i+0{,}1\,x_i\Leftrightarrow y_i=1{,}1\,x_i,\ i=1,2,\dots 5$
Στην περίπτωση αυτή γνωρίζουμε ότι: $\bar{y}=1{,}1\,\bar{x}$ και $s_y=1{,}1\,s_x$.

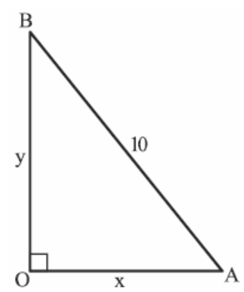
Επομένως ο συντελεστής μεταβολής των νέων τιμών είναι:

$$CV_{\nu\varepsilon o}=\frac{s_y}{\bar{y}}=\frac{1{,}1\,s_x}{1{,}1\,\bar{x}}=\frac{s_x}{\bar{x}}=CV=20\%$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε :

$$(OA)^2+(OB)^2=(AB)^2\Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2=10^2\Leftrightarrow$$
$$y^2=100-x^2\ \ (1)$$



Για να έχει λύση πρέπει:

$100-x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\leq 100\Leftrightarrow|x|\leq 10\Leftrightarrow -10\leq x\leq 10$.

Παράλληλα πρέπει $x>, y>0$ και $x<10,\ y<10$ γιατί τα x, y είναι οι κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ. Άρα $0<x<10$.

Από τη σχέση (1) προκύπτει, για $y>0$: $y=\sqrt{100-x^2}$ με $0<x<10$

Άρα η συνάρτηση που δίνει την πλευρά x είναι:

$$f(x)=\sqrt{100-x^2}\ \text{ με πεδίο ορισμού } D=(0,10).$$

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,10)$ με

$$f'(x)=\left(\sqrt{100-x^2}\right)'=\frac{(100-x^2)'}{2\sqrt{100-x^2}}=\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}<0$$

για κάθε $x\in(0,10)$.

Ο ρυθμός μεταβολής της $y=f(x)$ ως προς x όταν $x=8$ ισούται με:

$$f'(8)=\frac{-8}{\sqrt{100-8^2}}=\frac{-8}{\sqrt{36}}=-\frac{4}{3}$$

Δ3. Για το όριο έχουμε:

$$\lim_{x\to 6}\frac{f(x)-8}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{100-x^2}-8}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{(\sqrt{100-x^2}-8)(\sqrt{100-x^2}+8)}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)}$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{100-x^2-64}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)}=\lim_{x\to 6}\frac{36-x^2}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)}$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{(6-x)(6+x)}{-(6-x)(\sqrt{100-x^2}+8)}=\lim_{x\to 6}\frac{6+x}{\sqrt{100-x^2}+8}=-\frac{12}{16}=-\frac{3}{4}$$

Δ4. Παρατηρούμε ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,10)$.

Συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι: $x_1<x_3<x_2 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_3)>f(x_2)$ χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της f.

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!