

Πανελλαδικές Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού**,

Ημερομηνία: **Δευτέρα 2 Ιουνίου 2025**

Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 186.

A2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 76.

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 161.

A4.

α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$ και παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει:

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = -6$$

B2. Η συνάρτηση f γράφεται: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, $x \in \mathbb{R}$ και η παράγωγός της είναι: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$.

Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$

και την ανίσωση: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$ ή $x > 3$. Έτσι κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
f				

Παρατηρούμε ότι για τη συνεχή συνάρτηση f έχουμε:

- η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ με
 - $f((-\infty, 0]) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, -3]$
 - και $f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [-3, 1]$
- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 3]$ με $f([1, 3]) = [f(3), f(1)] = [-3, 1]$
- η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$ με $f([3, +\infty)) = \left[f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-3, +\infty)$

Ισχύει ότι:

- $y = 0 \notin (-\infty, -3] = f((-\infty, 0])$ οπότε συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα αυτό,
- $y = 0 \in (-3, 1] = f((0, 1])$ οπότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0, 1]$ με $f(x_1) = 0$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών $f((-\infty, 1]) = (-\infty, 1]$ και να δείξουμε την ύπαρξη ρίζας με εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$. Πράγματι, η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ με $f(0) \cdot f(1) < 0$, οπότε προκύπτει μια τουλάχιστον ρίζα $x_1 \in (0, 1)$ η οποία λόγω της μονοτονίας της f είναι μοναδική.

- $y = 0 \in [1, 3] = f([1, 3])$ οπότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_2 \in [1, 3]$ με $f(x_2) = 0$,
- $y = 0 \in (-3, 1] = f((0, 1])$ οπότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_3 \in (-3, 1]$ με $f(x_3) = 0$.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

B3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 6x - 12$.

Λύνουμε την εξίσωση: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

και την ανίσωση: $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Έτσι κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα κυρτότητας για την f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
f			

Παρατηρούμε ότι:

- η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$
- η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$
- η C_f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_4 = 2$, δηλαδή το σημείο $K(2, f(2))$ ή $K(2, -1)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_f .

B4. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f'(x) + 1$, (1).

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των f, g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ είναι αντίστοιχα:

$$(\varepsilon_1): y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi), \quad (3)$$

$$(\varepsilon_2): y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = g(\xi) + g'(\xi)(x - \xi), \quad (4)$$

Για να βρούμε το σημείο τομής των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (3) και (4) από όπου προκύπτει:

$$f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) = g(\xi) + g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow f(\xi) - g(\xi) = (g'(\xi) - f'(\xi))(x - \xi)$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(\xi) - (f(\xi) + \xi) = (f'(\xi) + 1 - f'(\xi))(x - \xi) \Leftrightarrow -\xi = x - \xi \Leftrightarrow x = 0$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Οπότε $y_0 = f(\xi) - \xi f'(\xi)$. Άρα, οι εξισώσεις των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των f, g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ τέμνονται στο σημείο $M(0, y_0)$ που είναι σημείο του άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση f έχει τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} e^x \cdot \eta\mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Είναι: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \cdot \eta\mu x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$ και $f(0) = 0$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Επομένως, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \eta\mu x$

Ισχύει ότι $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, $-e^x \leq e^x \cdot \eta\mu x \leq e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$ τότε, από κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \eta\mu x = 0$$

Άρα, η $y = 0$ είναι ασύμπτωτη στο $-\infty$.

- Είναι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1$

Άρα, $\lambda = 1$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άρα, $\beta = \frac{1}{2}$. Τελικά, η $y = x + \frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$. Κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν έχει, καθώς είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Αρκεί να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x + \frac{1}{2}$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(-\pi, 0)$. Έστω η $\varphi(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$, $x \leq 0$. Η φ συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, με $\varphi(-\pi) = f(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$
 $\varphi(0) = f(0) - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$, δηλαδή $\varphi(0) \cdot \varphi(-\pi) < 0$
 Άρα, από θεώρημα *Bolzano* υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\xi) = 0$, δηλαδή η C_f τέμνει την $y = x + \frac{1}{2}$ σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Γ4. Ο ρυθμός μεταβολής του $y = y(t)$ δεν ορίζεται για $x = x(t) = 0$, επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Επομένως, θεωρούμε $x = x(t) > 0$.

Αρκεί να εξετάσουμε αν η εξίσωση $y'(t_0) = x'(t_0)$ έχει λύση $t_0 \geq 0$. Ισχύει ότι

$$y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}, x(t) > 0.$$

Άρα $y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} \cdot (2x(t) \cdot x'(t) + x'(t))$ οπότε

$$\frac{x'(t_0) \cdot (2x(t_0) + 1)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = x'(t_0) \xLeftrightarrow{x'(t_0) > 0} \frac{2 \cdot x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = 1 \xLeftrightarrow{x'(t_0) > 1}$$

$$2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = 2x(t_0) + 1 \Leftrightarrow 4x^2(t_0) + 4x(t_0) = 4x^2(t_0) + 1 \Leftrightarrow 0 = 1 \text{ Αδύνατη.}$$

Άρα, δεν υπάρχει τέτοιο σημείο $M(x(t), y(t_0))$ ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = \frac{F'(x)x^{\ln x} - (x^{\ln x})'F(x)}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x)x^{\ln x} - x^{\ln x} 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot F(x)}{(x^{\ln x})^2}$$

$$= \frac{x^{\ln x} \left(f(x) - 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot F(x) \right)}{x^{2 \ln x}} = 0, \text{ λόγω της δοσμένης σχέσης.}$$

Επομένως από γνωστό θεώρημα η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

Δ2. i) Α' τρόπος: Στην αρχική σχέση για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 2F(1) \ln 1 = 0$. Η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$ επομένως έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(1) = 2$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}{\frac{\ln x}{x - 1}} = \frac{f'(1)}{1} = 2, \quad \text{αφού} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Β' τρόπος: Στην αρχική σχέση για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 2F(1) \ln 1 = 0$. Οπότε το όριο έχει απροσδιοριστία $0/0$ επομένως εφαρμόζοντας κανόνες D.I'H. έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = f'(1) = 2$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η

$$f'(x) = \frac{\left(2f(x) \ln x + 2F(x) \cdot \frac{1}{x} - f(x)\right)}{x}$$

είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Γ' τρόπος: Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2F(x) \ln x}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2F(x)}{x} = 2F(1), \text{ αφού η } F \text{ είναι συνεχής.}$$

Στην αρχική σχέση για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 2F(1) \ln 1 = 0$. Επίσης παραγωγίζοντας την αρχική έχουμε: $f(x) + xf'(x) = 2f(x) \ln x + 2F(x) \cdot \frac{1}{x}, x > 0$

Οπότε θέτοντας $x = 1$ λαμβάνουμε: $f(1) + f'(1) = 0 + 2F(1) \Leftrightarrow 2F(1) = f'(1)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$ επομένως έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(1) = 2$. Έτσι, έχουμε $2F(1) = 2 \Leftrightarrow F(1) = 1$.

Τελικά το αρχικό όριο ισούται με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 2F(1) = 2$.

ii) Στην αρχική σχέση για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 2F(1) \ln 1 = 0$. Επίσης παραγωγίζοντας την αρχική έχουμε: $f(x) + xf'(x) = 2f(x) \ln x + 2F(x) \cdot \frac{1}{x}, x > 0$

Οπότε θέτοντας $x = 1$ λαμβάνουμε: $f(1) + f'(1) = 0 + 2F(1) \Leftrightarrow 2F(1) = f'(1)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$ επομένως έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(1) = 2$. Έτσι, έχουμε $2F(1) = 2 \Leftrightarrow F(1) = 1$.

Β τρόπος: Η F είναι συνεχής επομένως

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)}{2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Η συνάρτηση g είναι σταθερή επομένως υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(x) = c \Leftrightarrow F(x) = cx^{\ln x}, x > 0$. Για $x = 1$ έχουμε $F(1) = c \cdot 1^0 \Leftrightarrow c = F(1) = 1$. Άρα $F(x) = x^{\ln x}, x > 0$.

Δ3. Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $F'(x) = (e^{(\ln x)^2})' = x^{\ln x} 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = x^{\ln x - 1} \cdot 2 \ln x$. Επομένως το πρόσημο της F' εξαρτάται μόνο από το $\ln x$, δηλαδή:

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ και } F'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Επομένως η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$.

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2 \leq 0$ (1)

Το $x = 1$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης.

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

- Αν $x > 1$, τότε $x^2 > x > 1 \xRightarrow{F\uparrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0$ επομένως η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $(1, +\infty)$.
- Αν $0 < x < 1$, τότε $0 < x^2 < x < 1 \xRightarrow{F\downarrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0$ επομένως η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $(1, +\infty)$.

Τελικά μοναδική λύση της αρχικής εξίσωσης είναι το $x = 1$.

Δ4. Έχουμε $E = \int_1^e |F(x)| dx$. Επίσης: $1 \leq x \leq e \xRightarrow{F\uparrow} F(1) \leq F(x) \leq F(e) \Rightarrow 1 \leq F(x) \leq e$

και οι ισότητες ισχύουν μόνο για $x = 1, x = e$, αντίστοιχα. Επομένως για το εμβαδόν E έχουμε

$$E = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e e^{(\ln x)^2} dx$$

Έχουμε $e^{(\ln x)^2} \geq \ln^2 x + 1, x > 0$ (αν θέσουμε στη γνωστή ανισότητα όπου x το $\ln^2 x$). Η ισότητα ισχύει μόνο για $\ln^2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ επομένως

$$\int_1^e e^{(\ln x)^2} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx$$

$$\begin{aligned} E &> \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \int_1^e (x)' \ln^2 x dx + [x]_1^e = [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + [x]_1^e \\ &= (e - 0) - 2 \int_1^e (x)' \cdot \ln x dx + (e - 1) = e - 2[x \ln x]_1^e + 2 \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx + (e - 1) \\ &= e - 2(e - 0) + 2[x]_1^e + (e - 1) = e - 2e + 2(e - 1) + (e - 1) = 2e - 3 \text{ τ. μ.} \end{aligned}$$

Επιμέλεια:

Βαγγέλης Ράλλης, Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Γιάννης Αλεξόπουλος,
Νίκος Αλεξόπουλος, Γιάννης Παπαβασιλείου, Κώστας Λέσκας, Βαγγέλης Καρύδης,
Κωνσταντίνα Μωραΐτη, Κωτσιαρίνης Αποστόλης, Γαληνός Δημήτρης,
Παπαδιαμαντής Μάριος, Μαρκάκης Ιάσοντας, Μαρκάκη Ηρώ.

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!

Υπολογισμός Μορίων Πανελλαδικών 2025

Χρησιμοποιήστε την Εφαρμογή για να **υπολογίσετε Μόρια**
για κάθε Πανεπιστημιακό Τμήμα / Σχολή!

Υπολογίστε Μόρια, δείτε τα **Τμήματα Επιτυχίας** (με τις περσινές βάσεις),
τις **Ελάχιστες Βάσεις Εισαγωγής** για κάθε Ειδικό Μάθημα
και για κάθε Πανεπιστημιακό Τμήμα

Link για το **mobile app υπολογισμού μορίων**

