Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού,**
Θετικών & Οικονομικών Σπουδών
Ημερομηνία: Τετάρτη 3 Ιουνίου 2026

Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

Α1. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 133*

Α2. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 151*

Α3. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 185*

Α4.

- α. Λάθος
- β. Σωστό
- γ. Σωστό
- δ. Σωστό
- ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε

$A_{f\circ g}=\left\{x\in A_g \middle| g(x)\in A_f\right\}=\{x\in[2,+\infty)|\sqrt{x-2}+1>1\}$

$=\{x\in[2,+\infty)|\sqrt{x-2}>0\}=\{x\in[2,+\infty)|x>2\}=(2,+\infty)$

και $h(x)=(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)$

$=f\left(\sqrt{x-2}+1\right)=2\ln\left(\sqrt{x-2}+1-1\right)=2\ln\left(\sqrt{x-2}\right)=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\ln(x-2)=\ln(x-2).$

Β2.

Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$ με $h'(x)=\frac{1}{x-2}>0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$ οπότε είναι $1-1$ δηλαδή αντιστρέφεται.

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$ επομένως

$h\big((2,+\infty)\big)=\left(\lim\limits_{x\to2^+}h(x),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)$

Για κάθε $x>2$ και $y\in\mathbb{R}$ έχουμε

$h(x)=y\Leftrightarrow\ln(x-2)=y\Leftrightarrow x-2=e^y\Leftrightarrow x=e^y+2$

Άρα $h^{-1}(x)=e^x+2, x\in\mathbb{R}$

Β3.

Έχουμε $\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2^+} \ln(x-2) = -\infty$ και

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2\ln(x-1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x-1}}{1} = 2, \qquad \textit{χρησιμοποιώντας κανόνα } D.l.H.$$

Άρα

$$\lim_{x\to 2} h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2} = -\infty$$

β' Τρόπος

Είναι: $\lim_{x\to 2}\left[\ln(x-2)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right]$

$\lim_{x\to 2^+}\left[\ln(x-2)\cdot\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right] = (-\infty)\cdot f'(2) = -\infty$

αφού $\lim_{x\to 2^+}\ln(x-2) = \lim_{u\to 0^+}\ln u = -\infty$

κάνοντας την αντικατάσταση: $u = x-2$ οπότε: $u_0 = \lim_{x\to 2^+}(x-2) = 0^+$.

αφού $f'(x) = \frac{2}{x-1}$ για κάθε $x > 1$, οπότε $f'(2) = 2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Απόδειξη ότι $\kappa = 0$:

Αν $\kappa \neq 0$, τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\kappa x = \begin{cases} +\infty, & \alpha\nu \quad \kappa > 0 \\ -\infty, & \alpha\nu \quad \kappa < 0 \end{cases}$$

Επειδή θέλουμε $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ πρέπει $\kappa = 0$.

ii) Με $\kappa = 0$ έχουμε: $f(x) = \frac{\mu x}{x^2+1}$.

Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση στο $O(0,0)$, άρα:

- $f(0) = 0$
- $f'(0) = 1$ (από την κλίση ευθείας $y = x$):

Για την παράγωγο έχουμε:

$$f'(x) = \frac{\mu(x^2+1) - \mu x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\mu(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Οπότε: $f\,'(0) \;=\; \frac{\mu \cdot 1}{1} \;=\; \mu$

Άρα $\mu = f'(0) = \; 1$ και $f(x) \;=\; \frac{x}{x^2+1}$.

Γ2. i) Μελέτη μονοτονίας και ακροτάτων:

Η f είναι παραγωγίσιμη με: $f\,'(x) \;=\; \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

Λύνουμε την εξίσωση: $f\,'(x) \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; 1 \;-\; x^2 \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; x \;= 1$ ή $x = -1$

Επομένως, έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας-ακροτάτων

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$T.E.$	$\nearrow$	$T.M$	$\searrow$	0

Τοπικό **ελάχιστο**: $f(-1) \;=\; \frac{-1}{2}$, τοπικό **μέγιστο**: $f(1) \;=\; \frac{1}{2}$.

ii) Σύνολο τιμών: Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \;=\; 0,\;\; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \;=\; 0,$

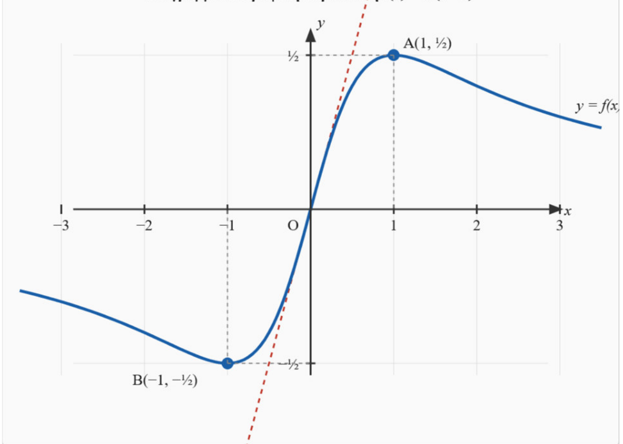
$f(-1) \;=\; -\frac{1}{2}$(τ.ελάχ.), $f(1) \;=\; \frac{1}{2}$(τ.μέγ.). Οπότε $f(-1)$ ολικό ελάχιστο και $f(1)$ ολικό μέγιστο.

Άρα σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Αναζητούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) \;=\; \frac{1}{2} \;+\; \alpha^2$ (1)

- Αν $\alpha \;=\; 0$: τότε (1) $\Leftrightarrow f(x) \;=\; \frac{1}{2}$ και έχει ακριβώς **1 λύση** ($x \;=\; 1$, η θέση ολικού μεγίστου).
- Αν $\alpha \;\neq\; 0$: τότε $\frac{1}{2} \;+\; \alpha^2 \;>\; \frac{1}{2} = f(1)$ που είναι το ολικό μέγιστο, οπότε η (1) είναι αδύνατη.

Διάγραμμα 1: Γραφική παράσταση f(x) = x/(x²+1)



Γ3. Ορίζουμε $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,dx, \nu \in \mathbb{N}$.

i) Απόδειξη ότι $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$:

Έχουμε:

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 x^{2\nu+1}\,dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}$$

ii) Υπολογισμός I_0, I_1, I_2:

Έχουμε:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{ln(x^2+1)}{2}\right]_0^1 = \frac{ln\,2}{2}$$

Επίσης για $\nu = 0$ από την (1) προκύπτει:

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Longrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{ln\,2}{2} = \frac{1-ln\,2}{2}$$

και για $\nu = 1$ είναι:

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Longrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1-ln\,2}{2} = \frac{2\,ln\,2-1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1,0)$ ώστε $g(x_1) + x_1 = 0$.

Θεωρούμε $\varphi(x) = g(x) + x$. Η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη) με

- $\varphi(-1) = g(-1) - 1 < 0$ (αφού $0 < g(-1) < 1 \Rightarrow g(-1) - 1 < 0$)
- $\varphi(0) = g(0) > 0$ (αφού $0 < g(0) < 1$)

Από το **Θεώρημα Bolzano**, υπάρχει $x_1 \in (-1,0)$ ώστε $\varphi(x_1) = 0$, δηλαδή $g(x_1) + x_1 = 0$.
Η φ είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε η φ' διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και άρα η φ είναι γνησίως μονότονη. Συνεπώς, η ρίζα $x_1 \in (-1,0)$ είναι μοναδική.

Δ2. Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2(g(x)+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-\kappa x}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}[x(g(x)+x)] = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2\eta\mu x}{x}+\frac{\varepsilon\varphi x}{x}-\kappa\right],\ \text{αφού}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\varepsilon\varphi x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2\cdot 1 + 1 - \kappa \Leftrightarrow \kappa = 3$$

Άρα: $f(x) = \begin{cases} x^2(g(x)+x) & \text{αν } x < 0 \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x & \text{αν } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Δ3. Στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι: $f(x) = 2\,\eta\mu\, x + \varepsilon\varphi\, x - 3x$.

i) Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με

$$f'(x) = 2\,\sigma\upsilon\nu\, x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2(2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0$$

αφού $0 < \sigma\upsilon\nu x < 1$.

Άρα $f'(x) > 0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, αφού είναι συνεχής στο $x = 0$.

Για κάθε $0 < x < \frac{\pi}{2} \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(0) < f(x)$ και επειδή $f(0) = 0$ ισχύει $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

ii) Έστω η συνάρτηση $h(x) = 3f(x) - \pi$

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ εφόσον $h'(x) = 3f'(x) > 0$ για $0 < x < \frac{\pi}{2}$ από το i.

Επίσης $h(0) = 3f(0) - \pi = -\pi < 0$ και $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} h(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = +\infty$

Επειδή $y = 0 \in h\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_2 στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ η οποία είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας της h και $h(0) \neq 0$.

Δ4. i) Απόδειξη ότι $f(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0]$:

Για $x \in [x_1, 0]$: $f(x) = x^2(g(x) + x)$.

Έχουμε: $x^2 \geq 0$ πάντα.

Για $\varphi(x) = g(x) + x$ παρατηρούμε ότι $\varphi(x_1) = 0$ με $x_1 \in (-1,0)$.

Επομένως για $x \in (x_1, 0]$ και επειδή η φ είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο δηλαδή $\varphi(x) \neq 0$.

Για $x = 0$ είναι $\varphi(0) = g(0) > 0$. Οπότε $\varphi(x) > 0$ για $x \in (x_1, 0]$

Άρα: $\varphi(x) = g(x) + x \geq 0$ στο $[x_1, 0]$.

Άρα $f(x) = x^2 \cdot \varphi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$ με την ισότητα να ισχύει για $x = x_1$.

ii) Αφού ο άξονας $y'y$ χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία ισχύει:

$$\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{f(x_2)} f(x)\,dx$$

Αφού $3f(x_2) = \pi \Longrightarrow f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ είναι $x = \frac{\pi}{3}$.

Υπολογίζουμε:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\,\eta\mu\,x + \varepsilon\varphi\,x - 3x)\,dx = \cdots = \left[-2\,\sigma\upsilon\nu\,x - ln(\sigma\upsilon\nu\,x) - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(-2 \cdot \frac{1}{2} - ln\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{9}\right) - (-2 - 0 - 0) = 1 + ln\,2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Αντίστοιχα:

$$\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x)\,dx$$

$$= \left(0 - \frac{x_1^3}{3} g(x_1)\right) - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx$$

αφού $g(x_1) + x_1 = 0$, ισχύει $g(x_1) = -x_1$:

$$= \frac{x_1^4}{3} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx$$

Οπότε:

$$\int_{x_1}^{0} x^2(g(x) + x)\,dx = \frac{x_1^4}{3} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx - \frac{x_1^4}{4} = \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx$$

Επειδή τα χωρία είναι ισεμβαδικά ισχύει:

$$\frac{x_1^4}{4} - \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = 3 + 3\ln 2 - \frac{\pi^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3$$

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!

Επιμέλεια:
Βαγγέλης Ράλλης, Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Γιάννης Παπαβασιλείου, Γιάννης Αλεξόπουλος, Νίκος Αλεξόπουλος, Κωνσταντίνα Μωραΐτη, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Βαγγέλης Καρύδης, Κώστας Λέσκας, Δημήτρης Γαληνός, Μαρκάκης Ιάσονας, Ηρώ Μαρκάκη