Πανελλήνιες Εξετάσεις Επαγγελματικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά (Άλγεβρα)**

Ημερομηνία: Τρίτη 2 Ιουνίου 2026

Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Σχολικό βιβλίο, κεφάλαιο 2 (Στατιστική) – Σχετικές Συχνότητες

Ορισμός σχετικής συχνότητας: η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i ορίζεται ως:

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

όπου n_i η απόλυτη συχνότητα της τιμής x_i και n το μέγεθος του δείγματος.

Απόδειξη ότι $f_1 + f_2 + \cdots + f_\kappa = 1$:

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_\kappa = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \cdots + \frac{n_\kappa}{n} = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_\kappa}{n}$$

Αφού $n_1 + n_2 + \cdots + n_\kappa = \mathrm{n}$ (άθροισμα όλων των απόλυτων συχνοτήτων ίσο με ν), έχουμε:

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_\kappa = \frac{n}{n} = 1$$

Α2.

Σχολικό βιβλίο, σελ. 88–89 («Μέτρα Θέσης – Διάμεσος»)

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων, διαταγμένων σε αύξουσα σειρά, ορίζεται ως:

- Αν το ν είναι **περιττός** αριθμός: η διάμεσος είναι η παρατήρηση που βρίσκεται στη θέση $\frac{\nu+1}{2}$.
- Αν το ν είναι **άρτιος** αριθμός: η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή αυτών στις θέσεις $\frac{\nu}{2}$ και $\frac{\nu}{2} + 1$.

Α3.

Σχολικό βιβλίο, σελ. 27–28 («Παράγωγος Συνάρτησης»)

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και B το σύνολο όλων των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Η **συνάρτηση πρώτης παραγώγου** της f ορίζεται ως η συνάρτηση $f': B \to \mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

για κάθε $x \in B$ (εφόσον υπάρχει το παραπάνω όριο).

Α4.

α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

Β1.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (πολυώνυμο) και η παράγωγός της είναι:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

Β2. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \text{ ή } x_2 = 3$$

Λύνουμε την ανίσωση $f'(x) > 0$:

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 3$$

Πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι η f είναι:

- Γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,\ -1]$ και $[3,\ +\infty)$.
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,\ 3]$.

Ακρότατα:

- Τοπικό **μέγιστο** στο $x = -1$, με $f(-1) = \frac{-1}{3} - 1 + 3 + 1 = \frac{-1-3+9+3}{3} = \frac{8}{3}$.
- Τοπικό **ελάχιστο** στο $x = 3$, με $f(3) = \frac{27}{3} - 9 - 9 + 1 = 9 - 9 - 9 + 1 = -8$.

Β3. Ο τύπος της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\big(0,\ f(0)\big)$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$$

Υπολογίζουμε $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0 - 0 - 3 = -3$. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - 1 = -3x \Leftrightarrow y = -3x + 1$$

Β4. Έχουμε $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$. Επομένως:

$$\lim_{x \to -1} \frac{f'(x)}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x-3) = -1 - 3 = -4$$

ΘΕΜΑ Γ

Δεδομένα: ο αριθμός βιβλίων είναι $4, 5, 4, \kappa, 0, 3, 7$ ($\nu = 7$ μαθητές).

Γ1. Αν ο μέσος αριθμός βιβλίων είναι $\overline{X} = 4$, τότε:

$$\overline{X} = \frac{4 + 5 + 4 + \kappa + 0 + 3 + 7}{7} = 4 \Leftrightarrow 23 + \kappa = 28 \Leftrightarrow \kappa = 5$$

Άρα κ $= 5$.
Για κ $= 5$, τα δεδομένα σε αύξουσα σειρά είναι: 0, 3, 4, 4, 5, 5, 7.

Γ2. Ο αριθμός παρατηρήσεων είναι $\nu = 7$ (περιττός). Επομένως η διάμεσος είναι η παρατήρηση στη θέση $\frac{\nu+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$: $\delta = x_4 = 4$

Γ3. Η μέση τιμή είναι $\bar{X} = 4$. Η διακύμανση υπολογίζεται ως:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\Sigma_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{X})^2$$

Αντικαθιστούμε:

$$s^2 = \frac{(0-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (5-4)^2 + (7-4)^2}{7}$$

$$= \frac{16+1+0+0+1+1+9}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

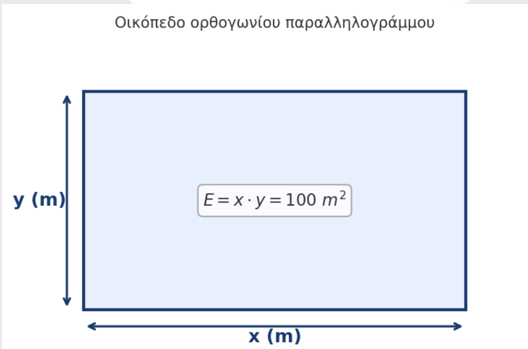
Γ4. Η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$. Ο συντελεστής μεταβολής είναι:

$$CV = \frac{s}{|\bar{X}|} = \frac{2}{4} = 0{,}5 = 50\%$$

Αφού $CV = 50\% > 33\%$, το δείγμα **δεν είναι ομοιογενές**.

ΘΕΜΑ Δ

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο εμβαδού 100 m^2. Έστω x και y οι πλευρές του $(x,\ y > 0)$.



Σχήμα 2: Οικόπεδο ορθογωνίου παραλληλογράμμου

Δ1. Από τη συνθήκη για το εμβαδό:

$$x \cdot y = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{x}$$

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi(x) = 2(x+y) = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x}$$

Άρα $\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x},\ x > 0$.

Δ2. Η Π είναι παραγωγίσιμη στο $(0 + \infty)$ και:

$$\Pi'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2} = \frac{2(x-10)(x+10)}{x^2}$$

Λύνουμε την εξίσωση $\Pi'(x) = 0$: $2(x-10)(x+10) = 0 \Rightarrow x = 10$ (αφού $x > 0$).

Πίνακας μονοτονίας:

x	0		10		$+\infty$
$\Pi'(x)$		-	0	+	
$\Pi(x)$		↘	40	↗	

Η Π παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 10$. Το αντίστοιχο $y = \frac{100}{10} = 10$.

Επειδή $x = y = 10$, το ορθογώνιο με τη μικρότερη περίμετρο είναι **τετράγωνο** (πλευράς 10 m). Η ελάχιστη περίμετρος: $\Pi(10) = 2 \cdot 10 + \frac{200}{10} = 20 + 20 = 40$ m

Δ3. Από τον πίνακα μονοτονίας, η Π είναι **γνησίως φθίνουσα** στο (010). Αφού $x_1 < x_2$, ισχύει $\Pi(x_1) > \Pi(x_2)$, άρα:

$\Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0$ και $x_1 - x_2 < 0$

Επομένως:

$$A = \frac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

δηλαδή η παράσταση A είναι **αρνητική**.

Δ4. Έχουμε $\Pi'(x) = \frac{2(x-10)(x+10)}{x^2}$.

Για $x \to 10$ παρατηρούμε ότι $\sqrt{10x} - 10 \to 0$ και $\Pi'(10) = 0$.

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή επί $\left(\sqrt{10x} + 10\right)$:

$$\lim_{x \to 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x} - 10} = \lim_{x \to 10} \frac{\Pi'(x) \cdot \left(\sqrt{10x} + 10\right)}{\left(\sqrt{10x} - 10\right) \cdot \left(\sqrt{10x} + 10\right)}$$

$$= \lim_{x \to 10} \frac{\frac{2(x-10)(x+10)}{x^2} \cdot \left(\sqrt{10x} + 10\right)}{10x - 100}$$

$$= \lim_{x \to 10} \frac{\frac{2(x-10)(x+10)}{x^2} \cdot \left(\sqrt{10x} + 10\right)}{10(x - 10)}$$

$$= \lim_{x \to 10} \frac{\frac{2(x+10)}{x^2} \cdot \left(\sqrt{10x} + 10\right)}{10} = \frac{\frac{2 \cdot 20}{100} \cdot 20}{10} = \frac{\frac{40}{100} \cdot 20}{10} = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5}$$

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!