ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

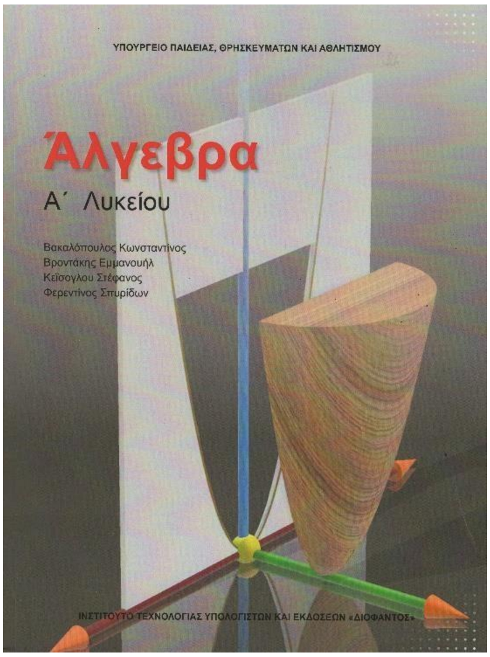
ΒΙΒΛΙΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

Βακαλόπουλος Κωνσταντίνος

Βροντάκης Εμμανουήλ

Κεΐσογλου Στέφανος

Φερεντίνος Σπυρίδων



Πίνακας Περιεχομένων

Πρόλογος

Το περιεχόμενο του διδακτικού βιβλίου δομείται με βάση τις παρακάτω βασικές στοχεύσεις του ΠΣ :

- **Είναι συμβατό και υποστηρίζει** τις αρχές και τους στόχους του νέου ΠΣ Οι γενικοί στόχοι μάθησης στο νέο ΠΣ εξειδικεύονται στα **Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)**, τα οποία διατυπώνονται με ακρίβεια για να περιγράψουν τι αλλά και σε ποιο επίπεδο καλούνται να γνωρίζουν, να κατανοούν και να είναι σε θέση να κάνουν οι μαθητές
- **Υπηρετεί την εξελικτική ανάπτυξη των ΠΜΑ εντός κάθε βαθμίδας και από βαθμίδα σε βαθμίδα** όπως αυτή αποτυπώνεται στο νέο ΠΣ, χαρτογραφώντας την εξελικτική πορεία της μάθησης και την ανάπτυξη των μαθηματικών νοημάτων (αυτό που μαθαίνει ο/η μαθητής/-τρια σε μια φάση, επιτελείται σε ανώτερο επίπεδο στην επόμενη φάση). Επίσης το περιεχόμενο των διδακτικών βιβλίων είναι απαραίτητο να δίνει την δυνατότητα να ανιχνεύεται σε αυτό η εξελικτική πορεία ανάπτυξης των ΠΜΑ.
- **Αναπτύσσει το μαθηματικό περιεχόμενο λαμβάνοντας υπόψη**: τη βασική αρχή της μάθησης μέσω διερεύνησης, την ανάπτυξη της ικανότητας όλων των μαθητών/-τριών να παίρνουν αποφάσεις (με ατομική, συλλογική σκέψη, επικοινωνία, αλληλεπίδραση και συνεργασία), να μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις, να νοηματοδοτούν και να κατανοούν σε βάθος τις Μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών, οι οποίες διατρέχουν το ΠΣ. Η γνώση των μαθηματικών δομείται πάνω σε γνωστικά σχήματα που οργανώνονται γύρω από κεντρικές ιδέες ή αρχές που ονομάζονται **Μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών**. Πρόκειται για αφηρημένες αρχές που χρησιμεύουν στην οργάνωση ευρέος φάσματος μαθηματικής γνώσης καθώς και στον καθορισμό στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων. Οι μεγάλες ιδέες διατρέχουν διαφορετικές μαθηματικές περιοχές και κάποιες από αυτές μπορεί να τις συναντήσει ο/η μαθητής/-τρια σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες.

Μεγάλες ιδέες είναι ιδέες όπως η παρακάτω

- η **Μαθηματική δομή,**
- η **Απόδειξη,**
- η **Γενίκευση,**
- η **Μεταβολή,**
- η **Ισοδυναμία,**
- οι **Μετασχηματισμοί**
- **Εμπλέκει** τους/τις μαθητές/-τριες σε **μαθηματικές πρακτικές** οι οποίες αναπτύσσουν τον συλλογισμό, την μοντελοποίηση, την επικοινωνία και τον αναστοχασμό και ενδυναμώνουν τη μάθηση των μαθηματικών. Ως **μαθηματικές πρακτικές** εννοούμε τις νοητικές εκείνες διεργασίες που εμπλέκονται στην ανάπτυξη γνώσης και κατανόησης. Οι μαθηματικές διεργασίες αποτελούν σημαντικές όψεις της μάθησης και της κατανόησης των μαθηματικών αλλά και της μαθηματικής πράξης. Για τον λόγο αυτόν στο ΠΣ η εμπλοκή των μαθητών/-τριών στις παραπάνω γνωστικές διεργασίες θεωρούνται ως μαθηματικές πρακτικές.
- **Παραπέμπει** στη χρήση και στην επιλογή **χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων** τα οποία αφενός να υποστηρίζουν τους/τις μαθητές/τριες στην προσπάθεια προσέγγισης της γνώσης, καθώς και στην εφαρμογή της γνώσης που απέκτησαν, αφετέρου να επιτρέπουν στους/στις μαθητές/-τριες να ασκήσουν μια μαθηματική δράση, όπως η αποτελεσματική διατύπωση και διερεύνηση εικασιών, η κατάλληλη

αναπαράσταση μιας μαθηματικής ιδέας, οι διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας μαθηματικής ιδέας, η μοντελοποίηση μιας κατάστασης.

- **Υποστηρίζει κοινωνικο-πολιτισμικές και κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές**. Οι κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές είναι κρίσιμες διεργασίες που ενέχουν ταυτόχρονα γνωστικά και κοινωνικο-πολιτισμικό-πολιτικά στοιχεία της ανθρώπινης (νοητικής και φυσικής) δράσης και δραστηριότητας (μάθησης ή άλλης), όπως η επικοινωνία, η αλληλεπίδραση, ο λόγος (discourse), η συμπερίληψη, η ανάπτυξη μαθηματικής ταυτότητας μάθησης, η ανάπτυξη κριτικής επίγνωσης του τρόπου χρήσης των μαθηματικών, η κατανόηση της σχέσης μαθηματικών και πολιτισμού, η μαθηματική εγγραμματοσύνη. Οι κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές αφορούν σε πρότυπα αναγνώρισης και διαχείρισης συναισθημάτων και συμπεριφορών, διαμόρφωσης και διατήρησης θετικών σχέσεων, λήψης υπεύθυνων αποφάσεων και επίλυσης προκλητικών καταστάσεων και, τέλος, διατύπωσης και επιτυχούς διεκπεραίωσης θετικών στόχων.
- **Περιλαμβάνει έργα και δραστηριότητες.** Το μαθηματικό έργο είναι το έργο που αναθέτει ο/η εκπαιδευτικός στους/στις μαθητές/-τριες, ενώ η μαθηματική δραστηριότητα αφορά στη δράση που προκύπτει στην πορεία εκπόνησης του μαθηματικού έργου που έχει ανατεθεί. Τα μαθηματικά έργα διαφοροποιούνται ως προς το μαθηματικό τους περιεχόμενο, ως προς την οργάνωση που απαιτούν (ατομικά ή ομαδικά), ως προς τη χρήση εργαλείων που προτείνουν και ως προς το είδος τους (γνωστικές απαιτήσεις, συνθετότητα, πλαίσιο, δράσεις που ενθαρρύνει, μαθηματικές γνωστικές διεργασίες και πρακτικές που ενδυναμώνει). Γενικότερα, ως μαθηματική δραστηριότητα εννοούμε τις μαθηματικές δράσεις τις οποίες αναπτύσσει ο/η μαθητής/-τρια (π.χ. αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, αναγνώριση και αναζήτηση κανονικοτήτων και μαθηματικής δομής, αναζήτηση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων), αξιοποιώντας μια ποικιλία εργαλείων (άτυπων, όπως πλακίδια και τυπικών, όπως ένα μοιρογνωμόνιο) με σκοπό να διαχειριστεί και να απαντήσει στο μαθηματικό έργο που του έθεσε ο/η εκπαιδευτικός.

ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ										
α/α	Κεφάλαιο	Σελίδες	Παράγραφοι	Δραστηριότητες	Εφαρμογές	Ασκήσεις				Ώρες
						Κατανόησης		Ασκήσεις--Προβλήματα	Θέματα Κριτικής Σκέψης	
						Με απάντηση	Για εξάσκηση			
1	Άρρητοι - Πραγματικοί Αριθμοί	35	3	9	22	24	41	40	5	15
2	Συναρτήσεις	41	4	6	12	11	28	36	-	20
3	Αλγεβρικές Παραστάσεις	7	1	1	3	7	5	13	2	5
4	Αλγεβρικές Σχέσεις	37	4	6	23	20	58	52	-	20
5	Σύνολα	12	2	6	5	6	33	8	-	10
Σύνολο		132	14	28	65	68	165	149	7	70

Στον **«βιβλίο εκπαιδευτικού»** θα παρατεθούν ανά κεφάλαιο τα ΠΜΑ που αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις παραγράφους του διδακτικού βιβλίου, καθώς και οι αντίστοιχες **δραστηριότητες** μέσω των οποίων οι μαθητές/τριες θα τα προσεγγίσουν. Ουσιαστικά θα προταθούν τρόποι διαχείρισης των δραστηριοτήτων προκειμένου οι μαθητές/τριες μέσα από ανακαλυπτικές διαδικασίες, με μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό καθοδήγησης από τους εκπαιδευτικούς, θα προσεγγίσουν τους στόχους που εκφράζονται με τα αντίστοιχα για κάθε παράγραφο ΠΜΑ.

Επίσης θα παρατεθούν ορισμένες επιπλέον, από τις υπάρχοντες στο διδακτικό βιβλίο, **δραστηριότητες** και **εφαρμογές** καθώς και **θέματα κριτικής σκέψης** προκειμένου ο εκπαιδευτικός να δώσει μεγαλύτερη έμφαση σε ορισμένες περιοχές που κατά την κρίση του απαιτούν μεγαλύτερη εμβάθυνση και διεύρυνση.

Κεφάλαιο 1ο

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1 Οι πραγματικοί αριθμοί και οι ιδιότητές τους

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο αυτή;

Με τη ύλη της παραγράφου αυτής θα μάθουμε να:

1) Διακρίνουμε τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις τους και να ταξινομούμε συγκεκριμένους αριθμούς στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}-\mathbb{Q})$ **(ΠΜΑ: Αρ.Π.10.1)**

2) Διερευνούμε την έννοια της «πυκνότητας» και της «διαδοχικότητας» στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών **(ΠΜΑ: Αρ.Π.10.2)**

3) Συμβολίζουμε με διαστήματα τα σύνολα των πραγματικών αριθμών που προσδιορίζονται με ανισοτικές σχέσεις. **(ΠΜΑ: Αρ.Π.10.3)**

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ.8)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αρ.Π.10.1

α) Αναμένουμε από τους μαθητές να αντιληφθούν ότι οι τρεις πρώτοι ρητοί είναι δεκαδικοί αριθμοί με πεπερασμένο (τερματιζόμενο) πλήθος δεκαδικών ψηφίων, σε αντίθεση με τους υπόλοιπους που έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, μέρος του οποίου είναι επαναλαμβανόμενο (περίοδος). Σε κάθε περίπτωση και οι δύο κατηγορίες δεκαδικών μπορούν να λάβουν μορφή κλάσματος, δηλαδή μορφή ρητού αριθμού. Παρατήρηση των δεκαδικών αποτελεσμάτων. Πράγματι,

$\frac{2}{5}=0{,}4$, $\frac{5}{4}=1{,}25$, $\frac{43857}{10000}=4{,}3857$

Οι τρεις παραπάνω αριθμοί έχουν πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

$\frac{1}{3}=0{,}333...$, $\frac{43}{99}=0{,}434343...$, $\frac{258}{999}=0{,}285285285...$

Οι τρεις τελευταίοι έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, αλλά εμφανίζουν περιοδικότητα.

***Συμπέρασμα*:**

Οι δεκαδικοί αριθμοί που προκύπτουν από τα παραπάνω κλάσματα έχουν είτε πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, είτε άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, με επαναλαμβανόμενο τμήμα αυτών (περιοδικοί δεκαδικοί) .
Όλοι είναι ρητοί αριθμοί, επειδή μπορούν να γραφούν ως κλάσματα.

β) Σύγκριση με αριθμούς όπως π και $\sqrt{2}$

Οι αριθμοί π και $\sqrt{2}$ έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία, αλλά δεν εμφανίζουν περιοδικότητα.

Πράγματι: $\pi=3{,}14159265...$ $\sqrt{2}=1{,}41421356...$

Η βασική διαφορά τους από τους αριθμούς του ερωτήματος α) είναι ότι δεν υπάρχει κάποιο τμήμα ψηφίων που να επαναλαμβάνεται συνεχώς.

Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται άρρητοι.

γ) Συμπέρασμα για ρητούς και άρρητους

Ένας αριθμός λέγεται ρητός όταν μπορεί να γραφεί ως κλάσμα α/β, όπου α και β είναι ακέραιοι και β ≠ 0.
Η δεκαδική μορφή ενός ρητού αριθμού είναι:

- είτε με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων,
- είτε με άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, τμήμα των οποίων επαναλαμβάνεται διαρκώς (περίοδος).

Παραδείγματα: 0,4 , 1,25 , 4,3857 , 0,333... , 0,434343... , 0,285285...

Οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν ως κλάσμα λέγονται άρρητοι. Η δεκαδική μορφή ενός άρρητου αριθμού είναι άπειρη και μη περιοδική.

Παραδείγματα: $\pi = 3{,}14159265...$, $\sqrt{2} = 1{,}41421356...$

Τελικό συμπέρασμα: Οι αριθμοί που έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία χωρίς περιοδικότητα είναι άρρητοι αριθμοί.

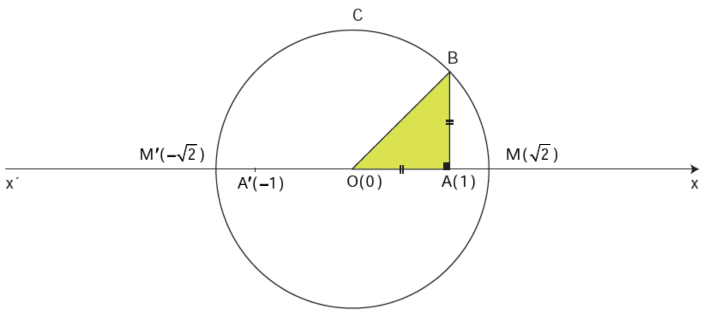
Επιπλέον Δραστηριότητα

Α) Να τοποθετήσετε με τη χρήση των γεωμετρικών σας οργάνων τους άρρητους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Που περίπου θα βρίσκεται ο αριθμός π;

Β) Να τοποθετήσετε με τη χρήση των γεωμετρικών σας οργάνων τους ρητούς αριθμούς $\frac{2}{3}$ και $\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

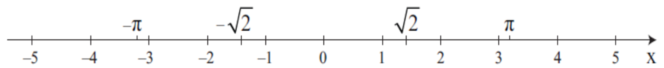
Ανάλυση δραστηριότητας

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αρ.Π.10.1

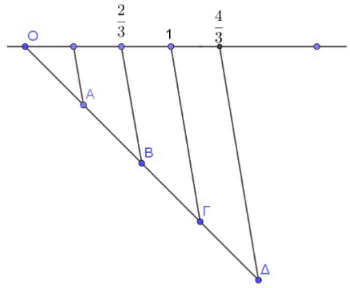


Α) Στο σημείο Α του άξονα που παριστάνει τον αριθμό 1 κατασκευάζουμε κάθετο τμήμα ΑΒ με μήκος 1. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ προκύπτει ότι $(OB) = \sqrt{2}$. συνέχεια με κέντρο το Ο και ακτίνα $OB = \sqrt{2}$ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα χ΄χ στα σημεία Μ και Μ΄ που παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ αντίστοιχα. (γιατί;)

(Τον αριθμό π τον τοποθετήσαμε κατά προσέγγιση αφού $\pi = 3{,}14...$)



Β) Από το σημείο Ο (που απεικονίζεται ο αριθμός 0) του άξονα των πραγματικών αριθμών φέρνουμε ημιευθεία και τα ίσα τμήματα $ΟΑ = ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ$. Ενώνουμε το Γ με το σημείο του άξονα που απεικονίζεται το 1 και φέρνουμε παράλληλες από τα σημεία Β και Δ προς το τμήμα που φέραμε από το Γ. Στα σημεία που τέμνουν οι παράλληλες αυτές τον άξονα απεικονίζονται οι αριθμοί $\frac{2}{3}$ και $\frac{4}{3}$ (Θεώρημα Θαλή)



Σχόλιο:

Στη δραστηριότητα αυτή, οι μαθητές μπορούν να θυμηθούν από το Γυμνάσιο το μάθημα των Καλλιτεχνικών, όπου χρησιμοποιούν τη συγκεκριμένη μέθοδο για να διαιρέσουν ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ν-ίσα μέρη (και έτσι να αποκτήσει η δραστηριότητα **διαθεματικό** χαρακτήρα).

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στην επόμενη δύο εφαρμογή μας δίνεται η ευκαιρία να παρουσιάσουμε την μέθοδο απόδειξης με την ***«εις άτοπον απαγωγή»***

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δε γράφεται στη μορφή: $\frac{α}{β}$ όπου α, β φυσικοί αριθμοί με $β \neq 0$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο απόδειξης: **«εις άτοπον απαγωγής»,** δηλαδή θα υποθέσουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρητός και με μια σειρά λογικών βημάτων και ισχυρισμών θα φτάσουμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που υποθέσαμε, θα οδηγηθούμε όπως λέμε σε άτοπο, δηλαδή σε κάτι παράλογο, που δε μπορεί να ισχύει! Συνεπώς, δε θα ισχύει η αρχική μας υπόθεση!

Αρχικά αποδεικνύουμε την πρόταση: **«αν ο αριθμός $α^2$ είναι άρτιος τότε και ο α είναι άρτιος».**

Χρησιμοποιώντας και εδώ την «απαγωγή σε άτοπο», υποθέτουμε ότι ο α δεν είναι άρτιος, οπότε θα είναι περιττός και θα υπάρχει ακέραιος κ ώστε: $α = 2κ + 1$ (γενική μορφή ενός περιττού αριθμού). Τότε θα ισχύει: $α^2 = (2κ+1)^2 = 4κ^2 + 4κ + 1 = 2(2κ^2 + 2κ) + 1 = 2λ + 1$, όπου $λ = 2κ^2 + 2κ$, ένας ακέραιος αριθμός. Άρα ο $α^2$ είναι περιττός, που είναι άτοπο, καθώς έρχεται σε αντίφαση με το δεδομένο της δοθείσας πρότασης, οπότε η αρχική μας υπόθεση είναι λανθασμένη και τελικά ο αριθμός α είναι άρτιος.

Υποθέτουμε στη συνέχεια, ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε θα υπάρχουν φυσικοί αριθμοί α, β με $β \neq 0$ τέτοιοι, ώστε: $\sqrt{2} = \frac{α}{β}$, όπου $\frac{α}{β}$ ανάγωγο κλάσμα. Τότε θα ισχύει: $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{α}{β}\right)^2$, δηλαδή $2 = \frac{α^2}{β^2}$ ή $α^2 = 2β^2$. Συνεπώς ο αριθμός $α^2$ είναι άρτιος οπότε (σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση) και **ο α είναι άρτιος**, δηλαδή θα γράφεται στη γενική μορφή: $α = 2λ$, όπου λ φυσικός. Τότε $α^2 = (2λ)^2 = 4λ^2$ και επομένως $2β^2 = 4λ^2$ ή $β^2 = 2λ^2$. Συνεπώς ο αριθμός $β^2$ είναι άρτιος και σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, **ο αριθμός β είναι άρτιος**. Τελικά το κλάσμα

$\frac{\alpha}{\beta}$ δεν είναι ανάγωγο. Αυτό όμως είναι άτοπο, εφόσον έχουμε υποθέσει ότι το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ανάγωγο. Άρα δεν ισχύει η αρχική μας υπόθεση, και τελικά ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Γενικά, με την αποδεικτική μέθοδο της **«Απαγωγής σε Άτοπο»** όταν μας ζητούν να αποδείξουμε μια σχέση ή ιδιότητα:

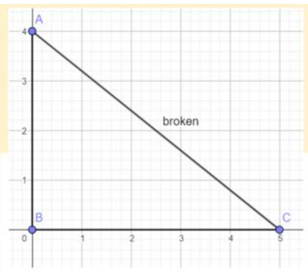
Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει η σχέση ή η ιδιότητα που θέλουμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας μια σειρά λογικών βημάτων και ισχυρισμών, οδηγούμαστε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε -δεδομένα- ότι ισχύει. Αναγόμαστε όπως λέμε σε άτοπο! Άρα δεν ισχύει αυτό που υποθέσαμε και έτσι έχουμε αποδείξει τη σχέση ή την ιδιότητα που μας ζήτησαν.

Ύπαρξη διαδοχικού αριθμού και η έννοια της πυκνότητας στα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών

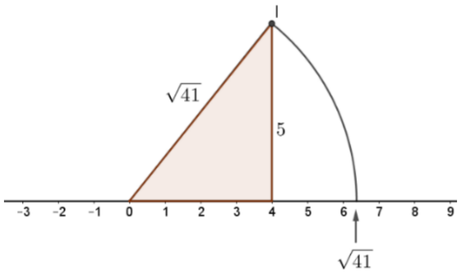
Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ.11)

Το ερώτημα 1) καλύπτει το ΠΜΑ Αρ.Π.10.1, τα ερωτήματα 2) και 3) καλύπτουν το ΠΜΑ Αρ.Π.10.2, το ερώτημα 4) καλύπτει το ΠΜΑ Αρ.Π.10.3

1) Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει ότι υποτείνουσα του τριγώνου έχει μήκος $\sqrt{41}$. Με τη γνωστή μέθοδο του Γυμνασίου βρίσκουμε ότι:



- $6^2 = 36 < 41 < 49 = 7^2$ άρα $6 < \sqrt{41} < 7$ ενώ $\sqrt{41} \approx 6$
- $6{,}4^2 = 40{,}96 < 41 < 6{,}5^2 = 42{,}25$ άρα $6{,}4 < \sqrt{41} < 6{,}5$ ενώ $\sqrt{41} \approx 6{,}4$
- $6{,}40^2 = 40{,}96 < 41 < 41{,}0881 = 6{,}41^2$ άρα $6{,}40 < \sqrt{41} < 6{,}41$ ενώ $\sqrt{41} \approx 6{,}40$
- $6{,}403^2 = 40{,}998409 < 41 < 6{,}404^2 = 41{,}011216$ άρα $6{,}403 < \sqrt{41} < 6{,}404$ ενώ $\sqrt{41} \approx 6{,}403$



Επειδή αυτή η διαδικασία είναι ατέρμονη, η δεκαδική προσέγγιση του αριθμού $\sqrt{41}$ είναι δεκαδικός αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία μη περιοδικά. Άρα ο $\sqrt{41}$ δεν είναι ρητός αλλά άρρητος.

2) Στους φυσικούς αριθμούς υπάρχει η έννοια του επόμενου και του προηγούμενου. Για παράδειγμα, ο επόμενος του 4 είναι ο 5 και ο προηγούμενος του 5 είναι ο 4.

Όμως στους ρητούς και στους πραγματικούς αριθμούς η κατάσταση είναι διαφορετική. Αν πάρουμε έναν αριθμό, όσο κοντά κι αν ψάξουμε δεξιά ή αριστερά του, θα υπάρχουν πάντοτε άπειροι άλλοι αριθμοί.

Ερώτηση: Ποιος είναι ο επόμενος του 1/4;

Δεν υπάρχει επόμενος ρητός ή πραγματικός αριθμός του 1/4. Για παράδειγμα, ανάμεσα στο 1/4 και σε οποιονδήποτε αριθμό μεγαλύτερό του μπορούμε να βρούμε έναν νέο αριθμό παίρνοντας τον μέσο όρο τους. Άρα δεν υπάρχει «αμέσως επόμενος» αριθμός.

Ερώτηση: Ποιος είναι ο προηγούμενος του $\sqrt{41}$;

Δεν υπάρχει προηγούμενος πραγματικός αριθμός του $\sqrt{41}$. Όσο κοντά κι αν επιλέξουμε έναν αριθμό μικρότερο από το √41, υπάρχει πάντα άλλος αριθμός ανάμεσά τους. Επομένως ούτε στους πραγματικούς αριθμούς υπάρχει η έννοια του «αμέσως προηγούμενου».

Ζητούνται ρητοί αριθμοί ανάμεσα στο 1/4 και στο 3/4. Μερικά παραδείγματα είναι:

Αριθμός	Δεκαδική μορφή	Έλεγχος
1/3	0,333...	1/4 < 1/3 < 3/4
1/2	0,5	1/4 < 1/2 < 3/4
2/3	0,666...	1/4 < 2/3 < 3/4
3/8	0,375	1/4 < 3/8 < 3/4
5/8	0,625	1/4 < 5/8 < 3/4

Μπορούμε να βρούμε όχι μόνο δύο ή τρεις, αλλά άπειρους ρητούς αριθμούς ανάμεσα στο 1/4 και στο 3/4.

Γιατί είναι άπειροι;

Αν έχουμε δύο διαφορετικούς ρητούς αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$, τότε ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ είναι επίσης ρητός και βρίσκεται ανάμεσά τους. Εφαρμόζοντας ξανά και ξανά αυτή τη διαδικασία, βρίσκουμε συνεχώς νέους ρητούς αριθμούς. Άρα ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς ρητούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί.

3) Εδώ δεν ζητούνται μόνο ρητοί αριθμοί, αλλά όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που βρίσκονται ανάμεσα στο 1/4 και στο 3/4.

α) Χωρίς να συμπεριλάβουμε τα άκρα:

Οι πραγματικοί αριθμοί x που είναι μεγαλύτεροι από 1/4 και μικρότεροι από 3/4 γράφονται: $\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}$ ή με συμβολισμό διαστήματος: $x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

β) Αν συμπεριλάβουμε και τα άκρα:

Οι πραγματικοί αριθμοί x που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1/4 και μικρότεροι ή ίσοι του 3/4 γράφονται:

$\frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}$ ή με συμβολισμό διαστήματος: $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$

Τελικό συμπέρασμα της δραστηριότητας:

Το μήκος AC στο πρόβλημα του σπασμένου καλαμιού είναι $\sqrt{41}$, δηλαδή άρρητος αριθμός.

Στους φυσικούς αριθμούς υπάρχει επόμενος και προηγούμενος αριθμός, ενώ στους ρητούς και στους πραγματικούς δεν υπάρχει γενικά «αμέσως επόμενος» ή «αμέσως προηγούμενος».

Ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς ρητούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί.

Το ανοικτό διάστημα από 1/4 έως 3/4 συμβολίζεται $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$, ενώ το κλειστό διάστημα: $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$.

Ύπαρξη διαδοχικού αριθμού και η έννοια της πυκνότητας στα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών

Επιπλέον δραστηριότητα

Να σχολιάσετε στην τάξη τα ακόλουθα σενάρια:

1ο: Σε μια σχολική τάξη Γυμνασίου, στο μάθημα των Μαθηματικών διατυπώνεται η ακόλουθη ερώτηση: «Πόσοι ρητοί αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του 0,1 και του 0,3;» . Ακολουθούν οι απαντήσεις τριών μαθητών:

Μ1: ένας, ο 0,2

Μ2: δεκαεννέα, οι 0,12, 0,13, 0,14, …, 0,29

Μ3: άπειροι

2ο: Σε μια σχολική τάξη Γυμνασίου, στο μάθημα των Μαθηματικών διατυπώνεται η ακόλουθη ερώτηση: «Πόσοι ρητοί αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του $\frac{3}{6}$ και του $\frac{5}{6}$;» . Ακολουθούν οι απαντήσεις δύο μαθητών:

Μ1: ένας, ο $\frac{4}{6}$

Μ2: κανένας, διότι το $\frac{4}{6}$ γίνεται με απλοποίηση $\frac{2}{3}$ και δε βρίσκεται μεταξύ των δοσμένων αριθμών.

Ανάλυση δραστηριότητας

Στο 1ο σενάριο οι πρώτοι δύο μαθητές δεν έχουν αντιληφθεί την απειρία του πλήθους των αριθμών μεταξύ δύο πραγματικών και χρησιμοποιούν αριθμούς με ένα ή δύο δεκαδικά ψηφία για να εξαντλήσουν τις περιπτώσεις των ενδιάμεσων αριθμών. Ο τρίτος μαθητής έχει αντιληφθεί την απειρία του πλήθους των αριθμών μεταξύ των 0,1 και 0,3.

Στο 2ο σενάριο οι μαθητές επιμένουν στην κλασματική μορφή των αριθμών και δεν απαντούν σωστά. Με την προτροπή του Καθηγητή μπορούν οι μαθητές να οδηγηθούν στις αντίστοιχες δεκαδικές μορφές, οπότε και θα αναγνωρίσουν τη σωστή πορεία απάντησης της ερώτησης.

1.2 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο αυτή;

Με τη ύλη της παραγράφου αυτής θα μάθουμε :

1) Να ορίζουμε την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού και να τη συνδέουμε με την απόσταση από το μηδέν. Επίσης, να ερμηνεύουμε γεωμετρικά την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο πραγματικών αριθμών **(ΠΜΑ: Αρ.Π.10.4)**

2) Να αποδεικνύουμε τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής. **(ΠΜΑ: Αρ.Π.10.5)**

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ.18)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αρ.Π.10.4

1) Το ισόγειο στο ρόλο του μηδενός (αρχή των αξόνων), βοηθά τους μαθητές να αντιληφθούν το γεωμετρικό, αλλά και τον αλγεβρικό ορισμό της απόλυτης τιμής.

Ένδειξη Ανελκυστήρα	Απόσταση από το ισόγειο	Απόλυτη τιμή
+2	2	2
–4	4	4
4	4	4
0	0	0
+8	8	10

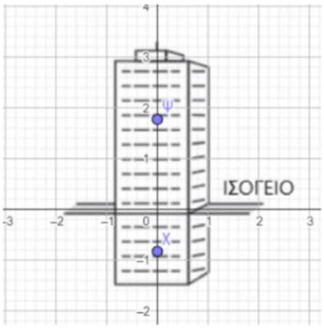
2) $|x-0|$ ή $|0-x|$, συζήτηση γύρω από το γεωμετρικό ορισμό της απόλυτης τιμής.

3)

Ένδειξη Ανελκυστήρα 1	+7	-1	0	+2
Ένδειξη Ανελκυστήρα 2	-2	0	-4	+7
Διαφορά ενδείξεων Ανελκυστήρων 1 και 2	$(+7)-(-2)$	$(-1)-0$	$0-(-4)$	$(+2)-(+7)$
Απόσταση θέσεων Ανελκυστήρων 1 και 2	9	1	4	5
Διαφορά ενδείξεων Ανελκυστήρων 2 και 1	$(-2)-(+7)$	$0-(-1)$	$(-4)-0$	$(+7)-(+2)$

Εδώ ζητούμε το σχολιασμό της απόστασης, η οποία αφενός εκφράζεται από έναν μη-αρνητικό αριθμό και αφετέρου με τη χρήση της απόλυτης τιμής της διαφοράς των δύο αριθμών. Ο μαθητής θα πρέπει να συνδυάσει και τις δύο απαιτήσεις για να εξαλείψει το πρόβλημα, προσθέτοντας την τελευταία γραμμή, όπου για παράδειγμα, στην πρώτη στήλη έχουμε για την απόσταση των ανελκυστήρων:

$|(+7)-(-2)|=|+9|=|(-2)-(+7)|=|-9|=9$.



4) Γενικά: $d(x,y)=|x-y|$ ή $|y-x|$:

Ανάλυση δραστηριότητας (σελ.19)

1. Προφανές

2. Αν $x\neq 0$, τότε το $|x|$ είναι το θετικό στοιχείο εκ των x, -x, που είναι και ο μεγαλύτερος από τους x, -x (καθώς κάθε θετικός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό).

3. Από τη συνέπεια 2. προκύπτει ότι: $x\leq|x|$ και $-|x|\leq x$, δηλαδή: $-|x|\leq x\leq|x|$

4. Δύο αντίθετοι αριθμοί (ή αντίθετες παραστάσεις) έχουν ίσες απόλυτες τιμές.

5. $|x|^2=|x|\cdot|x|=\begin{cases} x\cdot x=x^2, & x\geq 0 \\ (-x)\cdot(-x)=x^2, & x<0 \end{cases}$

6. Προφανές

7. Επειδή $|x|\geq 0$ και $|y|\geq 0$ αν ήταν $x=y=0$ τότε θα ίσχυε: $|x|+|y|=0$ που είναι άτοπο. Άρα τα x και y δεν είναι συγχρόνως μηδέν. Συνεπώς, ένα τουλάχιστον από τα x, y είναι διάφορο του μηδενός.

8. Αν $|x|=\theta$ με $\theta>0$ τότε $|x|^2=\theta^2$ δηλαδή $x^2=\theta^2$ δηλαδή $x^2-\theta^2=0$ δηλαδή $(x-\theta)\cdot(x+\theta)=0$ οπότε $x-\theta=0$ ή $x+\theta=0$, άρα $x=\theta$ ή $x=-\theta$.

Αντιστρόφως: αφού $\theta>0$, αν $x=\theta$ τότε $|x|=|\theta|=\theta$, ενώ αν $x=-\theta$ τότε $|x|=|-\theta|=|\theta|=\theta$

9. Αν $|x|=|y|$ τότε $|x|^2=|y|^2$ δηλαδή $x^2=y^2$ οπότε όπως στην 8. προκύπτει: $x=y$ ή $x=-y$ Αντιστρόφως: αν $x=y$ τότε $|x|=|y|$, ενώ αν $x=-y$ τότε $|x|=|-y|=|y|$

Ιδιότητες της Απόλυτης Τιμής

Επιπλέον δραστηριότητα

Α. **Παίρνοντας παραδείγματα με συγκεκριμένους ομόσημους, αλλά και ετερόσημους αριθμούς α και β, να συγκρίνετε τις τιμές των παραστάσεων $|\alpha+\beta|$ και $|\alpha|+|\beta|$. Διατυπώστε μια εικασία για τη μεταξύ τους σχέση.**

Β. **Αποδείξτε ότι: $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β. Πότε ισχύει η ισότητα;**

Ανάλυση δραστηριότητας

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει μέρος του ΠΜΑ Αρ.Π.10.5

Α.

1η περίπτωση: Για $\alpha=3$ και $\beta=5$ ισχύει: $|3+5|=|8|=8$, $|3|+|5|=3+5=8$. Άρα: $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ (1)

2η περίπτωση: Για $\alpha=-3$ και $\beta=5$ ισχύει: $|-3+5|=|2|=2$, $|-3|+|5|=3+5=8$. Άρα: $|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$ (2)

3η περίπτωση: Για $\alpha=3$ και $\beta=-5$ ισχύει: $|3+-5|=|-2|=2$, $|3|+|-5|=3+5=8$. Άρα: $|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$ (3)

4η περίπτωση: Για $\alpha=-3$ και $\beta=-5$ ισχύει: $|(-3)+(-5)|=|-8|=8$, $|-3|+|-5|=3+5=8$.

Άρα: $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ (4)

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) εικάζουμε ότι σε κάθε περίπτωση ισχύει: $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$ και συγκεκριμένα:

- Αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι, τότε ισχύει: $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$
- Αν οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι τότε ισχύει $|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$
- Αν τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς α και β είναι μηδέν τότε ισχύει: $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$

Β. Επειδή $|\alpha+\beta|$ και $|\alpha|+|\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, για να αποδείξουμε ότι $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$ αρκεί $|\alpha+\beta|^2\le(|\alpha|+|\beta|)^2$ αρκεί $(\alpha+\beta)^2\le|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2$ αρκεί $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\le\alpha^2+2|\alpha||\beta|+\beta^2$ αρκεί $\alpha\beta\le|\alpha\beta|$ δηλαδή $|\alpha\beta|\ge\alpha\beta$ που ισχύει!

Επίσης αναφέρουμε εναλλακτικό τρόπο απόδειξης των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών.

Για παράδειγμα της ιδιότητας (2): $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$, $\beta\neq0$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Αν $\alpha\ge0$ και $\beta>0$ τότε $\frac{\alpha}{\beta}\ge0$ οπότε $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$

2η περίπτωση: Αν $\alpha\ge0$ και $\beta<0$ τότε $\frac{\alpha}{\beta}<0$ οπότε $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{-\beta}=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$

3η περίπτωση: Αν $\alpha\le0$ και $\beta>0$ τότε $\frac{\alpha}{\beta}\le0$ οπότε $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{-\alpha}{\beta}=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$

4η περίπτωση: Αν $\alpha\le0$ και $\beta<0$ τότε $\frac{\alpha}{\beta}\ge0$ οπότε $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε και τις άλλες ιδιότητες

1.3 Νιοστή ρίζα – Δυνάμεις με ρητό εκθέτη και ιδιότητες

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο αυτή;

Στην παράγραφο αυτή θα μάθουμε για:

1) Τη ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού ως τη μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^{\nu}=\alpha$, ν θετικός ακέραιος και α μη αρνητικός πραγματικός αριθμός και αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες τις βασικές ιδιότητες (γινόμενο και πηλίκο ριζών) **(ΠΜΑ Αρ.Π.10.6)**

2) Τις δυνάμεις με ρητό εκθέτη και θα διερευνήσουμε τις ιδιότητές τους **(ΠΜΑ Αρ.Π.10.7)**

3) Τον υπολογισμό της τιμής αριθμητικών παραστάσεων, ενώ θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό και τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη. **(ΠΜΑ Αρ.Π.10.8)**

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ.32)

Τα ερωτήματα 1), 2) της δραστηριότητας καλύπτουν το ΠΜΑ Αρ.Π.10.6, ενώ τα ερωτήματα 3), 4) καλύπτουν το ΠΜΑ Αρ.Π.10.7

1) Από το γυμνάσιο γνωρίζουμε ότι αν α η πλευρά της πλατείας ότε το εμβαδόν της θα είναι: α^2. Άρα η πλευρά α θα είναι η τετραγωνική ρίζα του 144 δηλαδή η μη αρνητική ρίζα (γιατί είναι μήκος), της εξίσωσης: $\alpha^2=144$ δηλαδή ο αριθμός που αν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει αποτέλεσμα 144. Άρα $\alpha=\sqrt{144}=12$ μέτρα, καθώς $12^2=144$

2) Αν x μέτρα είναι το μήκος της πλευράς της δεξαμενής, τότε ο όγκος της θα ισούται με x^3 κυβικά μέτρα (γιατί;) και επομένως θα ισχύει: $x^3=216$. Ισοδύναμα, αναζητούμε τη μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης: $x^3=216$, το μη αρνητικό αριθμό (αφού είναι μήκος) δηλαδή που x όταν υψωθεί στον κύβο, θα μας δώσει 216. Με δοκιμές εύκολα μπορούμε να βρούμε πως ο ζητούμενος αριθμός είναι το 6, διότι: $6^3=216$. Ο αριθμός 6 ονομάζεται Τρίτη (ή Κυβική) Ρίζα του 216 και συμβολίζεται με $\sqrt[3]{216}$.Δηλαδή $\sqrt[3]{216}=6$, καθώς $6^3=216$.

3) Ομάδα Α: $15^2=225\neq144$, άρα λάθος στο συντριβάνι. $6^3=216$, σωστή δεξαμενή.

Ομάδα Β: $12^2=144$, σωστό συντριβάνι. $10^3=1000\neq216$, λάθος δεξαμενή.

Ομάδα Γ: $12^2=144$ και $6^3=216$. Και τα δύο σωστά. Άρα σωστή είναι η Ομάδα Γ.

4) $\sqrt{144}=12$ καθώς $12^2=144$. Όμως και $144^{\frac{1}{2}}=12$

$\sqrt[3]{216}=6$, καθώς $6^3=216$. Όμως και $216^{\frac{1}{3}}=6$

Γενικά: $\alpha^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\alpha}$ και $\alpha^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\alpha}$

Η νιοστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού α

ΕΦΑΡΜΟΓΗ (με τη στρατηγική της ανάλυσης ενός φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων)

Να απλοποιήσετε τις ρίζες: i) $\sqrt{1728}$, ii) $\sqrt[3]{1728}$

Λύση

Η **«στρατηγική»** για να απλοποιούμε ριζικά μεγάλων αριθμών είναι να αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

1728	2
864	2
432	2
216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

Οπότε: $1728 = 2^6 \cdot 3^3$ και συνεπώς:

i) $\sqrt{1728} = \sqrt{2^6 \cdot 3^3} = \sqrt{2^{23}} \cdot \sqrt{3^3} = \sqrt{\left(2^3\right)^2} \cdot \sqrt{3^3} = 2^3 \cdot \sqrt{3^3} = 8 \cdot \sqrt{27}$

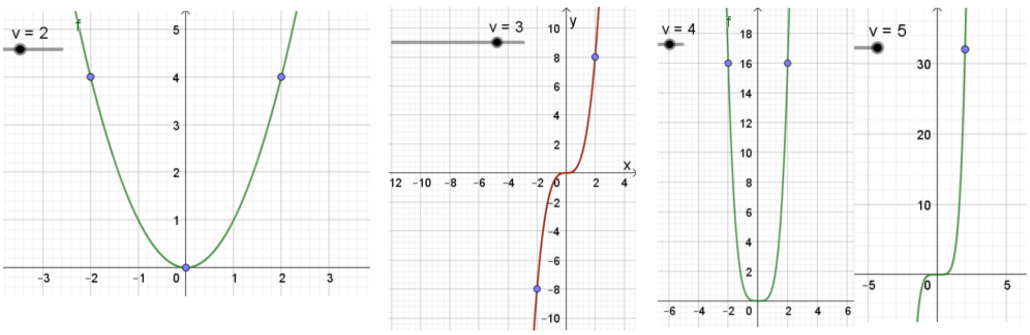
ii) $\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{2^{32}} \cdot \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{\left(2^2\right)^3} \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12$

Επιπλέον δραστηριότητα

Ας μεταφερθούμε στο περιβάλλον του λογισμικού GEOGEBRA και ας προσπαθήσουμε χρησιμοποιώντας τον δρομέα ν να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^5$, ... , γενικά: $f(x) = x^\nu$ με ν θετικό ακέραιο . https://www.geogebra.org/m/derruxtn

Για τις τιμές $\nu = 2$, $\nu = 3$, $\nu = 4$ και $\nu = 5$ έχουμε τα παρακάτω στιγμιότυπα:

Από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:



1ον) **Για $\nu = 2$, ποιοι αριθμοί δίνουν $x^2 = 4$;**

2ον) **Για $\nu = 3$, ποιοι αριθμοί δίνουν $x^3 = 8$;**

3ον) **Για $\nu = 3$, ποιοι αριθμοί δίνουν $x^3 = -8$;**

4ον) **Για $\nu = 4$, ποιοι αριθμοί δίνουν $x^4 = 16$;**

5ον) **Για $\nu = 5$, ποιοι αριθμοί δίνουν $x^5 = 32$;**

6ον) **Για $\nu = 5$, ποιοι αριθμοί δίνουν $x^5 = -32$;**

7ον) **Για $\nu = 2,3,4,5,\ldots$, ποιοι αριθμοί δίνουν $x^\nu = 0$**

Ανάλυση δραστηριότητας

Από τις γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν από το λογισμικό GEOGEBRA που θα γίνουν στον διαδραστικό πίνακα (αν υπάρχει) ή θα τις έχετε έτοιμες σε φύλλα εργασίας προκύπτει ότι:

Για $\nu=2$ υπάρχουν δύο αριθμοί, οι: $x=2$ ή $x=-2$

Για $\nu=3$ υπάρχει μόνο ένας αριθμός, ο: $x=2$

Για $\nu=4$ υπάρχουν δύο αριθμοί, οι: $x=2$ ή $x=-2$

Για $\nu=5$ υπάρχει μόνο ένας αριθμός, ο: $x=2$ (που δίνει 32), ενώ

Για $\nu=5$ υπάρχει επίσης μόνο ένας αριθμός, ο: $x=-2$ (που δίνει -32)

Για οποιαδήποτε τιμή του ν, υπάρχει ο αριθμός $x=0$ που δίνει $x^{\nu}=0$

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη και ιδιότητες των νιοστών ριζών

Ανάλυση δραστηριότητας (σελ.35)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αρ.Π.10.8

Ο μαθητής θα πρέπει -καθοδηγούμενος- να παρατηρήσει τα ίδια αποτελέσματα του κάθε ζεύγους, για $x,y>0$

- $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^4}=\sqrt[3]{x\cdot x^4}$
- $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}=\sqrt[4]{\dfrac{x}{x^3}}$
- $\sqrt[5]{x^2}=\left(\sqrt[5]{x}\right)^2$
- $\sqrt[8]{x^8\cdot y}=x\cdot\sqrt[8]{y}$

και να οδηγηθεί στην «εικασία» της ισχύος αντίστοιχων ιδιοτήτων, ανά περίπτωση.

Έτσι, θα έχουμε ότι για κάθε πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta\geq 0$ και ν, μ, ρ θετικούς ακεραίους ισχύουν:

1) $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$, **2)** $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, $\beta\neq 0$, **3)** $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\mu}$, **4)** $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\cdot\beta}=\alpha\cdot\sqrt[\nu]{\beta}$

1ο ζεύγος:

Μετατρέπουμε κάθε κυβική ρίζα σε δύναμη με εκθέτη 1/3:

$\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{x^6}=x^{\frac{6}{3}}$, $\sqrt[3]{x^7}=x^{\frac{7}{3}}$ και παρατηρούμε ότι: $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^6}=x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{6}{3}}=x^{\left(\frac{1}{3}+\frac{6}{3}\right)}=x^{\frac{7}{3}}=\sqrt[3]{x^7}$

Συνεπώς οι δύο παραστάσεις είναι ίσες.

2ο ζεύγος:

Γράφουμε τις τέταρτες ρίζες ως δυνάμεις με εκθέτη 1/4:

$\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[4]{x^3}=x^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[4]{\dfrac{x}{x^3}}=\sqrt[4]{x^{-2}}=x^{-\frac{2}{4}}$ και παρατηρούμε ότι: $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}=\dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}}=x^{\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)}=x^{-\frac{2}{4}}=\sqrt[4]{\dfrac{x}{x^3}}$

Συνεπώς οι δύο παραστάσεις είναι ίσες.

3ο ζεύγος:

$\sqrt[5]{x^2}=x^{\frac{2}{5}}$, $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2=\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^2=x^{\frac{2}{5}}$, συνεπώς οι δύο παραστάσεις είναι ίσες.

4ο ζεύγος:

Μετατρέπουμε την όγδοη ρίζα σε δύναμη με εκθέτη 1/8:

$\sqrt[8]{x^8\cdot y}=\sqrt[8]{x^8}\cdot\sqrt[8]{y}=x^{\frac{8}{8}}\cdot y^{\frac{1}{8}}=x\cdot y^{\frac{1}{8}}=x\cdot\sqrt[8]{y}$, συνεπώς οι δύο παραστάσεις είναι ίσες

<u>Σημείωση</u>: Οι περιορισμοί x>0 και y>0 επιτρέπουν τη χρήση όλων των παραπάνω μετατροπών χωρίς επιπλέον συζήτηση για πρόσημα ή πεδία ορισμού.

Τελικά, θα έχουμε ότι για κάθε πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta\geq 0$ και ν, μ, ρ θετικούς ακεραίους ισχύουν:

1) $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$, 2) $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, $\beta\neq 0$, 3) $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\mu$, 4) $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\cdot\beta}=\alpha\cdot\sqrt[\nu]{\beta}$

Θέματα κριτικής σκέψης

1) Να υπολογίσετε τη παράσταση: $\alpha=\sqrt[3]{3+\sqrt{\dfrac{242}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{\dfrac{242}{27}}}$

(**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$)

Λύση

$$\left(\underbrace{\sqrt[3]{3+\sqrt{\frac{242}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{\frac{242}{27}}}}_{\alpha}\right)^3=\left(\sqrt[3]{3+\frac{242}{27}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{3-\frac{242}{27}}\right)^3+3\sqrt[3]{3+\frac{242}{27}}\cdot\sqrt[3]{3-\frac{242}{27}}\left(\underbrace{\sqrt[3]{3+\frac{242}{27}}+\sqrt[3]{3-\frac{242}{27}}}_{\alpha}\right)\text{ οπότε}$$

$\alpha^3=\left(3+\dfrac{242}{27}\right)+\left(3-\dfrac{242}{27}\right)+3\sqrt[3]{\left(3+\dfrac{242}{27}\right)\left(3-\dfrac{242}{27}\right)}\cdot\alpha$ δηλαδή $\alpha^3=6+3\sqrt[3]{\left(3^2-\left(\dfrac{11\sqrt{6}}{9}\right)^2\right)}\cdot\alpha$ που σημαίνει

$\alpha^3=6+3\sqrt[3]{\left(9-\dfrac{242}{27}\right)}\cdot\alpha$ άρα $\alpha^3=6+3\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}\cdot\alpha$ επομένως $\alpha^3=6+3\dfrac{1}{3}\cdot\alpha$ άρα $\alpha^3-\alpha-6=0$

Έχουμε τις παρακάτω ισοδύναμες εξισώσεις:

$\alpha^3-\alpha-6=0$, $\alpha^3-2\alpha^2+2\alpha^2-4\alpha+3\alpha-6=0$, $\alpha^2(\alpha-2)+2\alpha(\alpha-2)+3(\alpha-2)=0$, $(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+3)=0$ που ισοδυναμεί με τις εξισώσεις: $\alpha-2=0$ ή $\alpha^2+2\alpha+3=0$ οπότε $\alpha=2$ αφού η εξίσωση $\alpha^2+2\alpha+3=0$ είναι αδύνατη.

2) **Α.** Να βρείτε τους αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει: $\sqrt{4x-8}+\sqrt[3]{x+2y+4}=0$

Β. Για τις τιμές των x και y που προέκυψαν από το ερώτημα Α, ν α υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $M=\sqrt[3]{3\cdot\left(2\sqrt{10}+7\right)\cdot\left(\sqrt{x-y}-\sqrt{x}\right)^2}$

Λύση

Α. Καταρχάς πρέπει να ισχύει: $4x-8\geq 0$ και $x+2y+4\geq 0$ (1)

Επειδή πρόκειται για άθροισμα μηδέν δύο μη αρνητικών παραστάσεων η εξίσωση ισοδυναμεί με το γραμμικό σύστημα των εξισώσεων: $4x-8=0$ και $x+2y+4=0$ οπότε $x=2$ και $2+2y+4=0$ δηλαδή $x=2$ και $y=-3$. Οι τιμές αυτές επαληθεύουν τους περιορισμούς (1).

Β. Για $x=2$ και $y=-3$ έχουμε

$$M=\sqrt[3]{3\cdot\left(2\sqrt{10}+7\right)\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt[3]{3\cdot\left(2\sqrt{10}+7\right)\cdot\left(7-2\sqrt{10}\right)}=\sqrt[3]{3\cdot(49-40)}=\sqrt[3]{27}=3$$

Κεφάλαιο 2ο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

2.1 Ο ορισμός της συνάρτησης – Αναπαραστάσεις συνάρτησης

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο αυτή;

Στην παράγραφο αυτή θα μάθουμε να:

1) Αναγνωρίζουμε συναρτήσεις μέσα από καταστάσεις συμμεταβολής της καθημερινής ζωής και θα τις διακρίνουμε από άλλες σχέσεις συμμεταβολής. **(ΠΜΑ: Αλ.Σρ. 10.1)**

2) Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της συνάρτησης για να εξετάζουμε αν μία σχέση ή αντιστοιχία είναι συνάρτηση ή όχι. **(ΠΜΑ: Αλ.Σρ. 10.2)**

3) Συνδέουμε διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (τύπο, πίνακα τιμών και γραφική παράσταση. **(ΠΜΑ: Αλ.Σρ. 10.3)**

4) Ερμηνεύουμε μια δεδομένη γραφική παράσταση συνάρτησης για να επιλύουμε ένα πρόβλημα. **(ΠΜΑ: Αλ.Σρ.10.4)**

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ.44)

Α. Γιατί τα σχήματα 1, 2 και 3 δεν είναι εφικτά;

Σχήμα 1:

Η οικογένεια δ δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα χωριό. Άρα το σενάριο δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί.

Σχήμα 2:

Η οικογένεια α αντιστοιχίζεται ταυτόχρονα στα χωριά 1 και 2.

Μια οικογένεια δεν μπορεί να μετακινηθεί σε δύο διαφορετικά χωριά.

Άρα δεν αποτελεί συνάρτηση.

Σχήμα 3:

Η οικογένεια β αντιστοιχίζεται στα χωριά 2, 3 και 4. Μια οικογένεια πρέπει να αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο χωριό. Άρα το σενάριο δεν είναι εφικτό.

Β. Διαφορές μεταξύ των σχημάτων Α και Β

Στα σχήματα 4, 5, 6 και 7:

- Κάθε οικογένεια έχει ακριβώς μία εικόνα.
- Καμία οικογένεια δεν μένει χωρίς αντιστοίχιση.
- Επιτρέπεται περισσότερες από μία οικογένειες να μετακινηθούν στο ίδιο χωριό.

Συνθήκη συνάρτησης:

Κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού πρέπει να αντιστοιχίζεται σε ένα και μόνο ένα στοιχείο του συνόλου άφιξης.

Γ. Παραδείγματα άλλων συναρτήσεων

Παράδειγμα 1: α→1, β→2, γ→1, δ→4

Παράδειγμα 2: α→3, β→3, γ→2, δ→1

Παράδειγμα 3: α→4, β→1, γ→4, δ→2

Δ. Πίνακες αντιστοίχισης

Σχήμα 4

Οικογένειες	*α*	*β*	*γ*	*δ*
Χωριά	*1*	*2*	*3*	*4*

Σχήμα 5

Οικογένειες	*α*	*β*	*γ*	*δ*
Χωριά	*2*	*2*	*2*	*2*

Σχήμα 6

Οικογένειες	*α*	*β*	*γ*	*δ*
Χωριά	*1*	*3*	*4*	*2*

Σχήμα 7

Οικογένειες	*α*	*β*	*γ*	*δ*
Χωριά	*1*	*1*	*3*	*3*

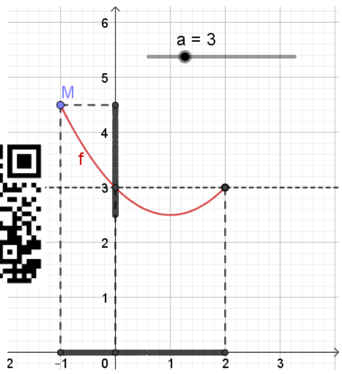
Γενικό Συμπέρασμα:

Μια συνάρτηση είναι μια αντιστοίχιση κατά την οποία κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού αντιστοιχίζεται σε ένα και μόνο ένα στοιχείο του συνόλου άφιξης.

Στο παράδειγμα: Πεδίο ορισμού: {α, β, γ, δ}, Σύνολο άφιξης: {1, 2, 3, 4}

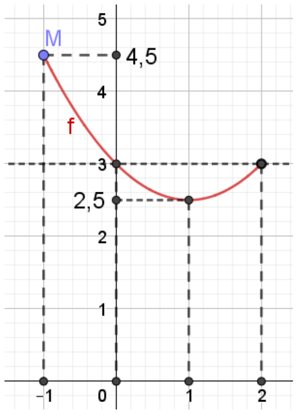
Ανάλυση δραστηριότητα (σελ.48)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.4

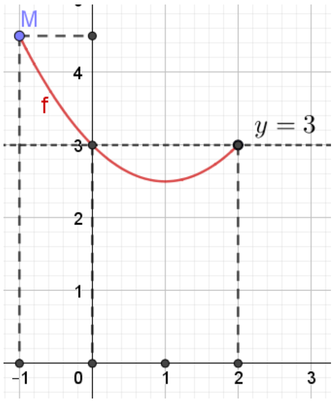


1) Από τη μετακίνηση του σημείου Μ βλέπουμε ότι οι τετμημένες του διαγράφουν το διάστημα από -1 έως 2 : ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ και οι τεταγμένες του το διάστημα από 2,5 έως 4,5 : ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

2) Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της 4,5 για $x=-1$ και την ελάχιστη τιμή της 2,5 για $x=1$



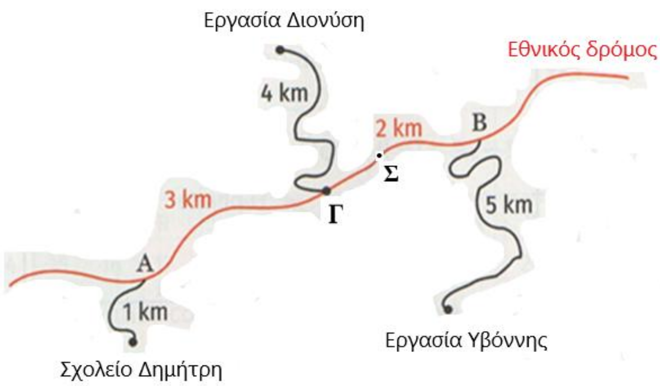
3) α) Από τη γραφική παράσταση της f και την ευθεία $\varepsilon: y=\alpha$ παρατηρούμε ότι η ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για $-2{,}5<\alpha\le 3$.



β) Για $\alpha=3$ η ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση σε δύο σημεία με τετμημένη: 0 και 2 αντίστοιχα. Άρα η εξίσωση $f(x)=3$ έχει δύο ακριβώς λύσεις τις 0 και 2.

Επιπλέον δραστηριότητα:

Ο Διονύσης και η Υβόννη πρόκειται να κτίσουν ένα σπίτι πάνω στον Εθνικό δρόμο (κόκκινη γραμμή) σε σημείο Σ μεταξύ των σημείων Γ και Β. Έχουν τα εξής δεδομένα:



- **Η εργασία του Διονύση απέχει 4 km από τον εθνικό δρόμο (σημείο Γ) και για να πάει εκεί θα μετακινείται με το αυτοκίνητό του, με το οποίο κινείται με 80km/h στον εθνικό δρόμο (κόκκινη γραμμή) και με 40km/h στον επαρχιακό δρόμο (μαύρη γραμμή).**

- **Η εργασία της Υβόννης απέχει 5 km από τον εθνικό δρόμο (σημείο Β) και για να πάει εκεί θα μετακινείται με το αυτοκίνητό της, με το οποίο κινείται με 80 km/h στον εθνικό δρόμο και με 40 km/h στον επαρχιακό.**
- **Το σχολείο του γιού τους Δημήτρη απέχει 1 km από τον εθνικό δρόμο (σημείο Α) και θα τον πηγαίνει εκεί σχολικό λεωφορείο που κινείται με 60 km/h στον εθνικό δρόμο και 30 km/h στον επαρχιακό δρόμο.**

Έστω Σ το σημείο που θα χτιστεί το σπίτι και x η απόσταση ΓΣ.

1ον) Αν ο Διονύσης και η Υβόννη θέλουν να απέχει το σπίτι εξ ίσου από τη δουλειά τους τότε πόσο χρόνο θα κάνει ο Δημήτρης να πάει σχολείο του;

2ον) Αν ο Διονύσης και η Υβόννη θέλουν να κάνουν ίδιο χρόνο να πάνε στη δουλειά τους τότε πόσο χρόνο θα θέλει ο Δημήτρης να πάει στο σχολείο του;

Ανάλυση δραστηριότητας

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.1

- Ο Διονύσης για να πάει στη δουλειά του θα διανύσει διάστημα x με 80km/h και 4km με 40 km/h. Αν T_Δ ο χρόνος που θα χρειαστεί τότε (συναρτήσει του x): $T_\Delta(x)=\frac{x}{80}+\frac{4}{40}=\frac{x}{80}+\frac{1}{10}$ δηλαδή $T_\Delta(x)=\frac{x}{80}+0{,}1$ (σε ώρες) με $0\le x\le 2$.
- Η Υβόννη για να πάει στη δουλειά της θα διανύσει διάστημα $2-x$ με 80 km/h και 5 km με 40 km/h. Αν T_Y ο χρόνος που θα χρειαστεί τότε (συναρτήσει του x): θα ισχύει: $T_Y(x)=\frac{2-x}{80}+\frac{5}{40}=\frac{2-x}{80}+\frac{1}{8}$ δηλαδή $T_Y(x)=\frac{2-x}{80}+0{,}125$ (σε ώρες) με $0\le x\le 2$.
- Ο Δημήτρης για να πάει στο σχολείο θα διανύσει διάστημα: $x+3$ με 60 km/h και 1 km με 30 km/h . Αν $T_{\Delta\eta\mu}$ ο χρόνος που θα χρειαστεί τότε (σε συνάρτηση του x): $T_{\Delta\eta\mu}(x)=\frac{x+3}{60}+\frac{1}{30}$ (σε ώρες) με $0\le x\le 2$

1ον) Πρέπει: $S_\Delta=S_Y$ δηλαδή $x+4=(2-x)+5$ οπότε $2x=3$ που σημαίνει $x=1{,}5$ km .

Τότε ο χρόνος του Δημήτρη θα γίνει $T_{\Delta\eta\mu}(1{,}5)=\frac{1{,}5+3}{60}+\frac{1}{30}=\frac{6{,}5}{60}$ ώρες δηλαδή $6{,}5\cdot\frac{1}{60}\cdot 60=6{,}5$ λεπτά.

2ον) Πρέπει: $T_\Delta(x)=T_Y(x)$ δηλαδή $\frac{x}{80}+\frac{4}{40}=\frac{2-x}{80}+\frac{1}{8}$ δηλαδή $x+8=2-x+10$ δηλαδή $x=2$. Άρα στη περίπτωση αυτή το σπίτι θα χτιστεί στο σημείο Β. Ο Δημήτρης τότε θα χρειαστεί $T(2)=\frac{2+3}{60}+\frac{1}{30}=\frac{7}{60}$ της ώρας δηλαδή 7 min

2.2 Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο αυτή;

Στη παράγραφο αυτή θα:

1) Ερμηνεύσουμε το ρόλο των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta$ **(ΠΜΑ: Αλ.Σρ.10.5)**

2) Μάθουμε να αντλούμε από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής $f(x)=\alpha x+\beta$ πληροφορίες για τη συνάρτηση, όπως η κλίση της και η εξίσωσή της. **(ΠΜΑ: Αλ.Σρ.10.6)**

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ. 56)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.5

Α) Αρχικός πίνακας δεδομένων:

Όγκος x σε m^3	Κόστος Κ σε €
20	200
50	500
100	1000
150	1500
200	2000
250	2500
300	3000
350	3500

i) Ποια σχέση παρατηρούμε ανάμεσα στον όγκο και το κόστος;

Παρατηρούμε ότι το κόστος είναι πάντα δεκαπλάσιο του όγκου.

Για παράδειγμα: $20 \cdot 10 = 200$, $50 \cdot 10 = 500$, $100 \cdot 10 = 1000$.

Άρα, όταν ο όγκος διπλασιάζεται, διπλασιάζεται και το κόστος. Όταν ο όγκος τριπλασιάζεται, τριπλασιάζεται και το κόστος. Επομένως, ο όγκος και το κόστος είναι ανάλογα ποσά.

ii) Πόσο κοστίζει κάθε 1 m^3 εκσκαφής;

Υπολογίζουμε το κόστος ανά κυβικό μέτρο διαιρώντας το κόστος με τον αντίστοιχο όγκο:

$200 : 20 = 10$, $500 : 50 = 10$, $1000 : 100 = 10$. Άρα κάθε 1 m^3 εκσκαφής κοστίζει 10 €.

iii) Πόσο θα κοστίσει η εκσκαφή 120 m^3;

Αφού κάθε 1 m^3 κοστίζει 10 €, για 120 m^3 έχουμε: $120 \cdot 10 = 1200$. Επομένως η εκσκαφή 120 m^3 θα κοστίσει 1200 €.

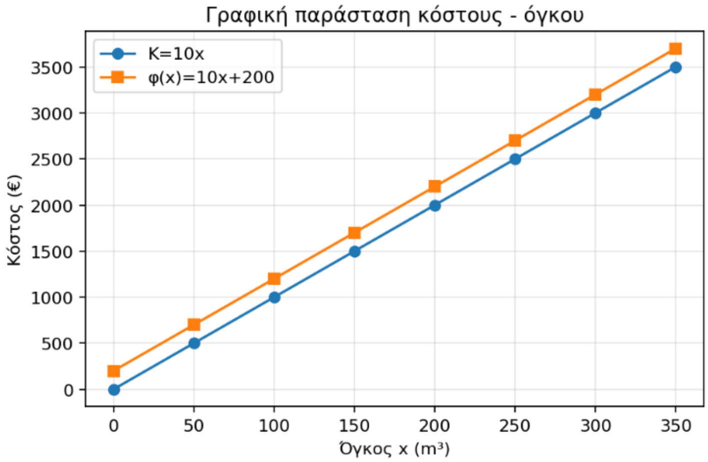
Β) i) Αν το κόστος Κ εξαρτάται από τον όγκο x, ποιον τύπο γράφουμε;

Αν x είναι ο όγκος σε m^3 και K το συνολικό κόστος σε €, τότε $K(x) = 10x$: Ο τύπος αυτός συνδέει κάθε τιμή του όγκου x με το αντίστοιχο κόστος K.

ii) Ποιος είναι ο ρόλος του αριθμού 10 στον τύπο;

Ο αριθμός 10 είναι ο συντελεστής αναλογίας. Παριστάνει το κόστος για κάθε 1 m^3 εκσκαφής, δηλαδή 10 €/m^3. Στη γραφική παράσταση ο αριθμός 10 εκφράζει και την κλίση της ευθείας: για κάθε αύξηση του όγκου κατά 1 m^3, το κόστος αυξάνεται κατά 10 €.

iii) Γραφική παράσταση κόστους και όγκου



Η γραφική παράσταση του τύπου $K(x) = 10x$ είναι ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων, επειδή για x = 0 έχουμε
K = 0.

Γ) i) Πώς αλλάζει ο τύπος;

Αν σε κάθε εργασία προστίθεται σταθερό κόστος 200 € για μεταφορικά, ασφάλειες ή προετοιμασία, τότε στο μεταβλητό κόστος 10x προσθέτουμε 200. Νέος τύπος: $\varphi(x) = 10x + 200$

ii) Τι παριστάνει ο αριθμός 200;

Ο αριθμός 200 παριστάνει το σταθερό κόστος. Δηλαδή είναι το ποσό που πληρώνεται ανεξάρτητα από τον όγκο της εκσκαφής. Ακόμη και αν x = 0, ο τύπος δίνει φ(0) = 200. Άρα η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα του κόστους στο 200.

iii) Για πόσα m^3 πλήρωσε ένας πελάτης αν έδωσε 1700 €;

Χρησιμοποιούμε τον νέο τύπο: $\varphi(x) = 10x + 200$

Αφού ο πελάτης πλήρωσε 1700 €, έχουμε: $1700 = 10x + 200$ που σημαίνει ότι: $x = 150$.

Άρα ο πελάτης πλήρωσε για εκσκαφή 150 m^3.

Επιπλέον δραστηριότητα 1

Ένας αρχιτέκτονας σχεδίασε την τριγωνική στέγη μιας οικοδομής όπως δείχνει το ακόλουθο σχήμα. Να βρείτε:

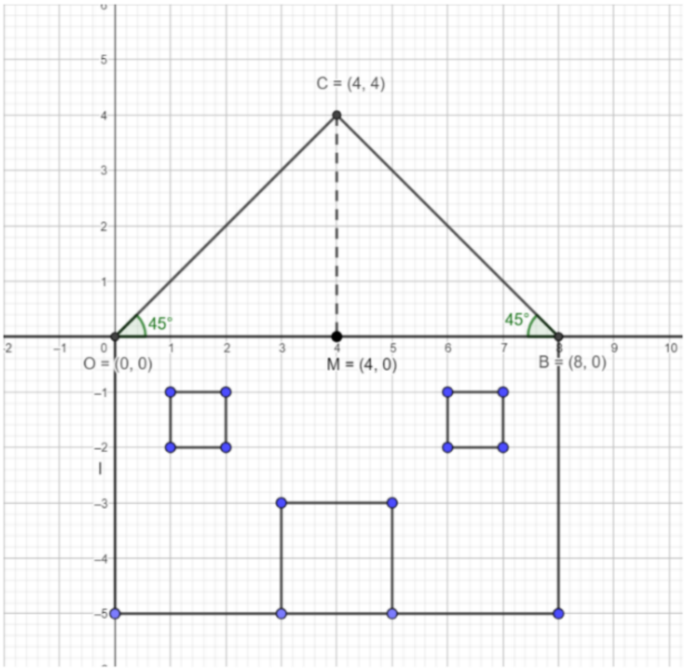
i) Την εξίσωση της ευθείας OC

ii) Την εξίσωση της ευθείας CB

iii) Τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ που περιγράφει τη στέγη OCB.

iv) Τις τιμές: $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$. Τι παρατηρείτε;

v) Τις τιμές: $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$, $f(8)$. Τι παρατηρείτε;



Ανάλυση δραστηριότητας:

Τα ερωτήματα i), ii) καλύπτουν το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.5, ενώ τα ερωτήματα iv), v) καλύπτουν το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.6

i) Η ευθεία OC διέρχεται από το (0, 0), οπότε έχει τη μορφή: $y=\lambda_{OC}x$, με $\lambda_{OC}=\varepsilon\varphi 45^{o}=1$. Άρα $y=x$.

ii) Η ευθεία CB έχει τη γενική μορφή: $y=\lambda_{CB}x+\beta$, με $\lambda_{CB}=\varepsilon\varphi 135^{o}=-1$. Άρα $y=-x+\beta$ και καθώς το C(4, 4) ανήκει στην ευθεία, θα είναι: $4=-4+\beta$, δηλαδή: $\beta=8$ και τελικά η ευθεία είναι η $y=-x+8$.

iii) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } 0\leq x<4 \\ -x+8, & \text{αν } 4\leq x\leq 8 \end{cases}$

iv) $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=3,\ f(4)=4$. Παρατηρούμε ότι καθώς μεγαλώνουν οι τιμές της μεταβλητής x, οι τιμές της μεταβλητής y μεγαλώνουν επίσης. Στη γραφική μας παράσταση, αυτό δηλώνεται από την ανοδική της πορεία στο διάστημα $[0,\ 4]$

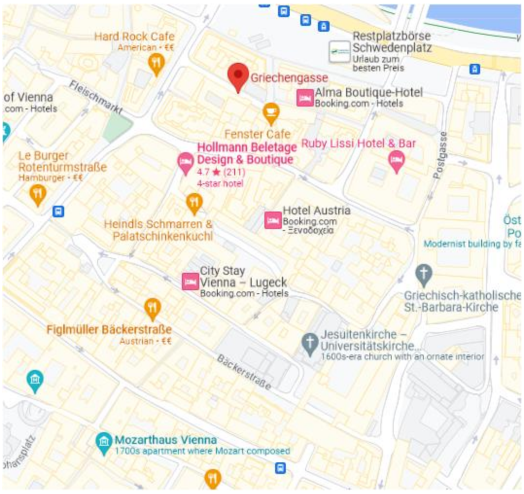
(Λέμε, όπως θα μάθουμε σε επόμενη τάξη, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ 4]$)

v) $f(4)=4,\ f(5)=3,\ f(6)=2,\ f(7)=1,\ f(8)=0$

Παρατηρούμε ότι καθώς μεγαλώνουν οι τιμές της μεταβλητής x, οι τιμές της μεταβλητής y μικραίνουν. Στη γραφική μας παράσταση, αυτό δηλώνεται από την καθοδική της πορεία στο διάστημα $[4, 8]$

(Λέμε, όπως θα μάθουμε σε επόμενη τάξη, ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[4, 8]$)

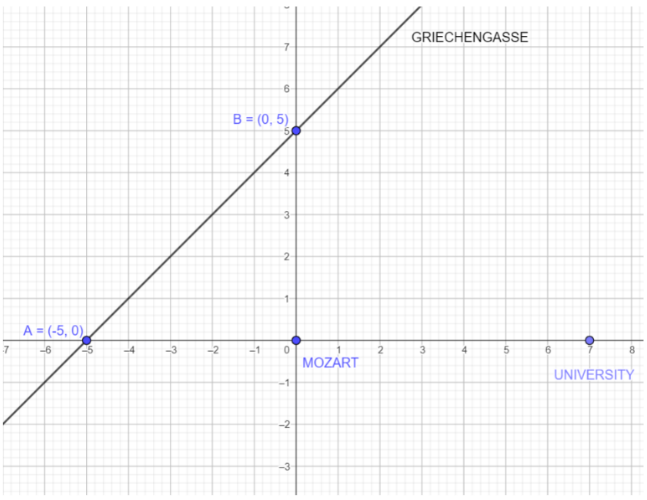
Επιπλέον δραστηριότητα 2



Στις 12 Αυγούστου του 2025 ο Νίκος έκλεισε αεροπορικό εισιτήριο για να πάει στη Βιέννη και να επισκεφθεί τους φίλους του, Rene και Ευκλείδη, που μένουν στην Ελληνική συνοικία. Καθώς σχεδίαζε το ταξίδι, τους ρώτησε για το πως θα έβρισκε την οδό "Griechengasse" (ή «Οδό των Ελλήνων»), όπου θα τον φιλοξενούσαν. Εκείνοι, θέλοντας να «πειράξουν» το φίλο τους, αλλά και να δοκιμάσουν τις γνώσεις του πάνω στα Μαθηματικά, του απάντησαν ξεχωριστά, χρησιμοποιώντας ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων όπου στην αρχή του βρισκόταν το σπίτι του διάσημου συνθέτη Wolfgang Amadeus Mozart.

- **Ο Ευκλείδης του έστειλε το ακόλουθο σχήμα με οδηγίες:**

«Βρες τα σημεία με συντεταγμένες $A(-5, 0)$ και $B(0, 5)$. Σχεδίασε τη μοναδική ευθεία που διέρχεται από αυτά και έχεις μπροστά σου την οδό "Griechengasse".



- **Ο Rene του έστειλε το ακόλουθο σχήμα με οδηγίες:**

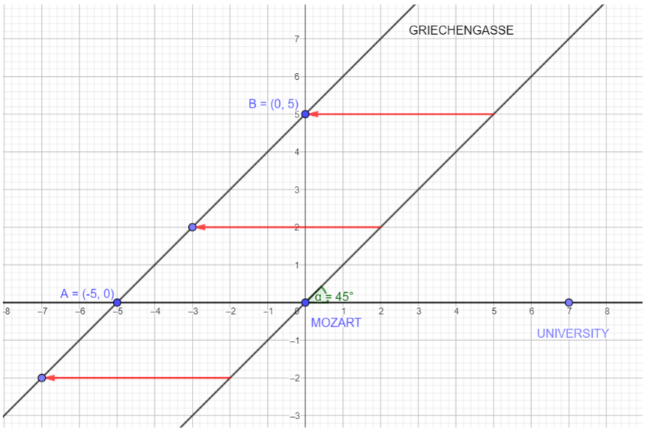
«Από το σπίτι του Mozart, κοιτάζοντας προς το Πανεπιστήμιο, στρίψε με φορά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού κατά 45 μοίρες. Βρίσκεσαι τώρα πάνω σε μια νοητή ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η οδός "Griechengasse" είναι η πέμπτη παράλληλος προς την ευθεία στην οποία βρίσκεσαι, κινούμενος προς τα αριστερά.»

Ερωτήματα:

1) **Είναι σωστή η περιγραφή του Ευκλείδη για την τοποθεσία της οδού;**
2) **Είναι σωστή η περιγραφή του Rene για την τοποθεσία της οδού;**

3) **Μετά από την περιγραφή του Ευκλείδη, μπορείτε να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περιγράφει την οδό;**

4) **Μετά από την περιγραφή του Rene, μπορείτε να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περιγράφει αρχικά την οδό που διέρχεται από το σπίτι του Mozart;**



5) **Μπορείτε στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περιγράφει την οδό "Griechengasse"; Ποιος θα είναι ο ρόλος της γωνίας των 45 μοιρών και ποιος της 5ης παραλλήλου; Πως εκφράζονται οι ρόλοι αυτοί στην εξίσωση της ευθείας;**

6) **Σχολιάστε με τον Καθηγητή σας την επιλογή των ονομάτων των δύο φίλων του Νίκου.**

Ανάλυση δραστηριότητας:

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.5

1) Ναι, καθώς δίνονται δύο σημεία και ως γνωστόν, σύμφωνα με τον Ευκλείδη:

Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

2) Ναι, καθώς ο Rene δίνει ένα σημείο και την κλίση μιας ευθείας, η οποία είναι παράλληλη της ζητούμενης.

3) Χρησιμοποιώντας τα δύο σημεία, στην γενική μορφή $y = \alpha x + \beta$, βρίσκουμε: α=1, β=5, οπότε έχουμε: $y = x + 5$

4) Αρχικά έχουμε την περιγραφή της ευθείας $y = x$ (διχοτόμος του 1ου και 3ου τεταρτημορίου, διερχόμενη εκ του (0, 0).

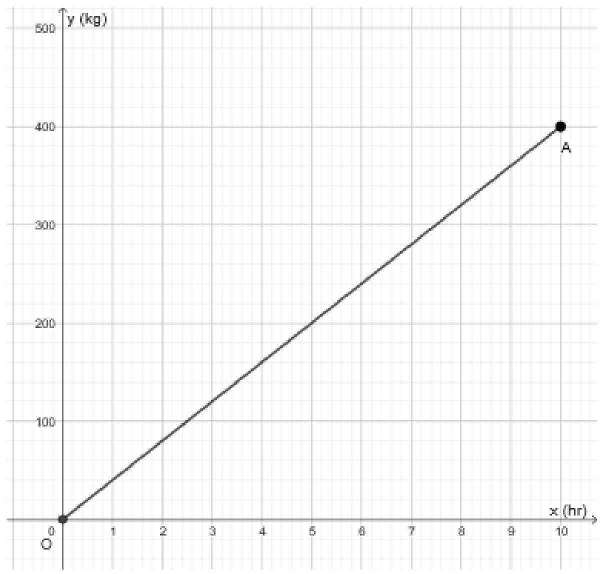
5) Τελικά έχουμε την ευθεία $y = x + 5$, όπου το α=1 δηλώνει την κλίση της ευθείας και το β=5 την παράλληλη μεταφορά της γραφικής παράστασης της $y = x$, κατά 5 μονάδες προς τα αριστερά.

6) Ευκλείδης και Descartes…

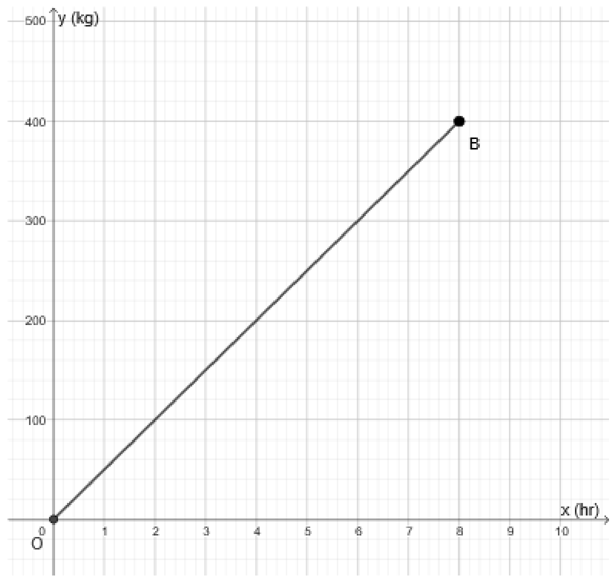
Επιπλέον δραστηριότητα 3

Ένα εργοστάσιο κατεψυγμένης ζύμης έχει δύο μηχανές ζύμωσης (ζυμωτήρια) Α και Β, οι οποίες παράγουν 400 κιλά ζύμης καθημερινά, με σταθερό ρυθμό. Η μηχανή Α παράγει τα 400 κιλά σε 10 ώρες, ενώ η μηχανή Β σε 8 ώρες. Για κάθε μηχανή έχουμε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις, όπου παριστάνονται τα κιλά της ζύμης y, σε σχέση με το χρόνο, x (σε ώρες).

ΜΗΧΑΝΗ Α



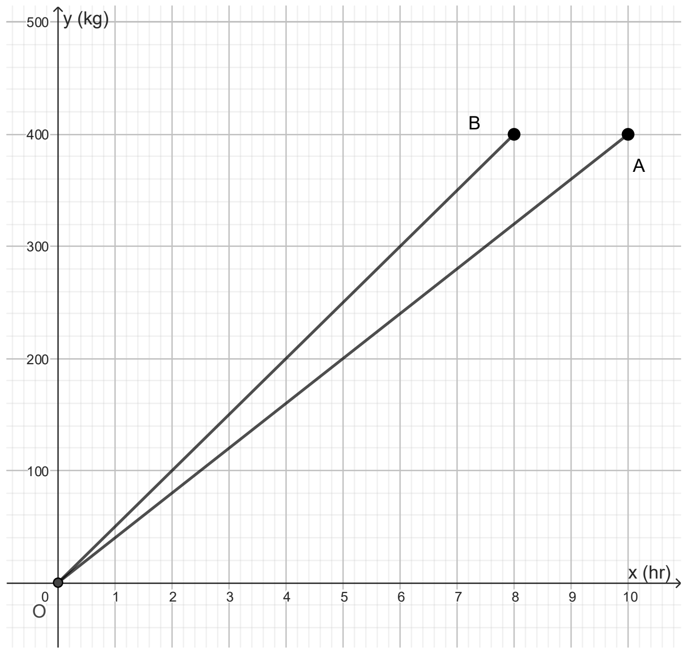
ΜΗΧΑΝΗ Β



i) **Μπορείτε να βρείτε πόση ζύμη παράγει η κάθε μηχανή στη διάρκεια της μίας ώρας;**

ii) **Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων (ευθειών) που μοντελοποιούν Μαθηματικά τη λειτουργία των μηχανών Α και Β αντίστοιχα.**

iii) **Αν παραστήσουμε και τις δύο μηχανές γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων, ποια γραφική παράσταση είναι πιο «απότομη», δηλαδή πόσο πιο απότομα «ανεβαίνει», καθώς αυξάνει ο χρόνος;**



iv) **Ποιος παράγοντας ρυθμίζει το πόσο «απότομη» είναι η γραφική παράσταση μιας ευθείας;**

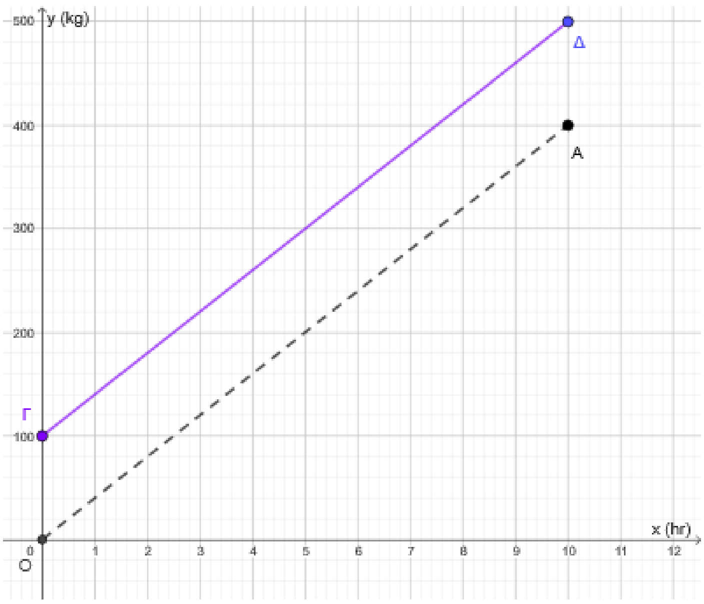
v) **Θυμόμαστε από το Γυμνάσιο ότι η …………… μιας ευθείας είναι ο λόγος της μεταβολής ………………., ως προς τη ………………………μεταβολή…………………………………………………………………**

vi) **Χρησιμοποιώντας τους παρακάτω πίνακες αντιστοίχων τιμών, επαληθεύστε τις απαντήσεις που δώσατε στα προηγούμενα ερωτήματα :**

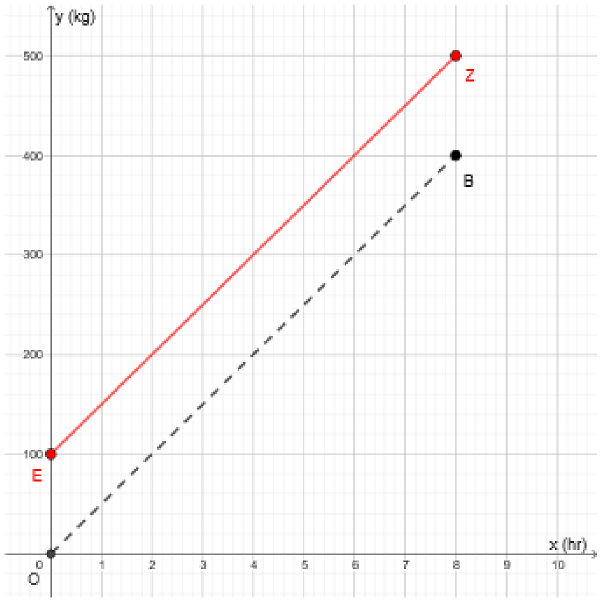
	x (hr)	y (kg)
A	2	80
	3	120

	x (hr)	y (kg)
B	2	100
	3	150

Αν ένα βράδυ, πριν κλείσουμε τις μηχανές κρατήσουμε τα τελευταία 100 κιλά μέσα σε καθένα από τα ζυμωτήρια Α, Β ως προζύμι για την αρχή της επόμενης ημέρας, τότε οι γραφικές παραστάσεις της παραγωγής των μηχανών θα είναι αντίστοιχα:



ΜΗΧΑΝΗ Α



ΜΗΧΑΝΗ Β

vii) **Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που μοντελοποιούν Μαθηματικά τη λειτουργία των μηχανών Α και Β στην περίπτωση αυτή. Ποιος ο ρόλος του προζυμιού στην περίπτωση αυτή; Πως επηρεάζει τις αρχικές γραφικές παραστάσεις;**

Ανάλυση δραστηριότητας:

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει τα ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.5 και Αλ.Σρ.10.6

i) Οι μαθητές χρησιμοποιώντας είτε άμεσα τις γραφικές παραστάσεις, είτε απλό συλλογισμό αναλογίας (για παράδειγμα: η μηχανή Α παράγει σε 10 ώρες 400 κιλά ζύμης, σε 1 ώρα πόσα κιλά ζύμης παράγει;), βρίσκουν ότι η Μηχανή Α παράγει 40 κιλά ζύμης την ώρα, ενώ η Μηχανή Β παράγει 50 κιλά ζύμης την ώρα

ii) Μηχανή Α: $y = 40 \cdot x$ Μηχανή Β: $y = 50 \cdot x$ (ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων)

iii) Η γραφική παράσταση της Μηχανής Β

iv) Η κλίση των ευθειών.

v) Η κλίση μιας ευθείας είναι ο λόγος της μεταβολής του y προς τη μοναδιαία μεταβολή του x.

vi) Οι μαθητές μέσω των πινάκων αντιστοίχων τιμών μπορούν να επαληθεύσουν όλα τα προηγούμενα ερωτήματα.

vii) Μηχανή Α: $y = 40 \cdot x + 100$ Μηχανή Β: $y = 50 \cdot x + 100$. Η ύπαρξη του προζυμιού έχει ως αποτέλεσμα την έναρξη λειτουργίας των μηχανών από το σημείο $(0, 100)$. Επιφέρει παράλληλη μεταφορά (προς τα πάνω) των αρχικών γραφικών παραστάσεων (εδώ με διακεκομμένη γραμμή).

2.3 Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο αυτή;

Στην παράγραφο αυτή θα:

1) Χρησιμοποιούμε πολυωνυμικές συναρτήσεις 1ου και 2ου βαθμού, στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων. **(ΠΜΑ: Αλ.Σρ.10.7)**

2) Προσδιορίζουν αλγεβρικά και ερμηνεύουν γραφικά το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ **(ΠΜΑ: Αλ.Σρ.10.8)**

3) Χρησιμοποιούμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ για την εύρεση του προσήμου της f . **(ΠΜΑ: Αλ.Σρ.10.9)**

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ.65)

Τα ερωτήματα Α1, Α2 και Β1 καλύπτουν το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.7, το ερώτημα Β3 καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.8, ενώ το ερώτημα Β3 καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.9

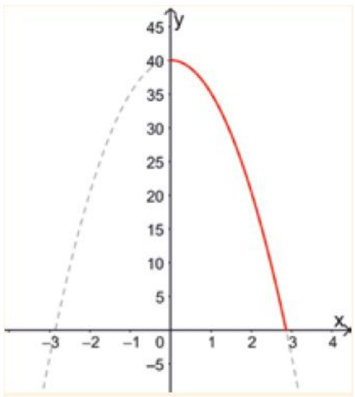
Μέρος Α

Α1: Υποθέτοντας ζεύγη θερμοκρασίας (C^o, F^o), έχουμε (0, 32) και (100, 212), οπότε αν το μοντέλο περιγράφεται από την ευθεία: $F=\alpha\cdot C+\beta$, έχουμε σταδιακά: $32=\alpha\cdot 0+\beta$, άρα β = 32 και τελικά $212=100\cdot\alpha+32$, οπότε α = 1.8. Συνεπώς: $F=1.8\cdot C+32$

Α2: Για $F=75$, έχουμε: $75=1.8\cdot C+32$, άρα $C=23.9$ βαθμοί Celsius.

Μέρος Β

Β1: Με τη βοήθεια του Καθηγητή, ο μαθητής διαπιστώνει πως μπορεί να θεωρήσει κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων και να περιγράψει την τροχιά του κολυμβητή, όπως στο ακόλουθο σχήμα:



Ξεκινώντας από την παραβολή $y=\alpha t^2$ με α<0, ο μαθητής μπορεί (διαισθητικά) να οδηγηθεί στη γενική μορφή: $y=\alpha t^2+40$ και καθώς το σημείο με συντεταγμένες $(2.86,\ 0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της παραβολική τροχιάς, θα έχουμε: $0=\alpha(2.86)^2+40$ άρα $\alpha\approx-4,9$. Τελικά $h(t)=-4,9t^2+40,\quad t\geq 0$

Β2: Για $t=2$, $h(2)=20,4m$

Β3: Για $h=10m$, $10=-4,9t^2+40$ επομένως $t\approx 2.47sec$

Β4: Στην επιφάνεια: T=23,9°, ενώ η θερμοκρασία μειώνεται κατά 1°C κάθε 3 m.

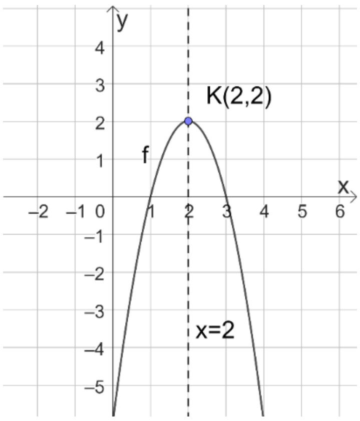
Για 8 m έχουμε: Μείωση = 8/3 ≈ 2,67°C, οπότε η θερμοκρασία είναι: T=23,9-2,67≈21,23°C

Άρα σε βάθος 8 m η θερμοκρασία είναι περίπου 21,2°C.

Ανάλυση δραστηριότητας (σελ.69)

Με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra χαράσσουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

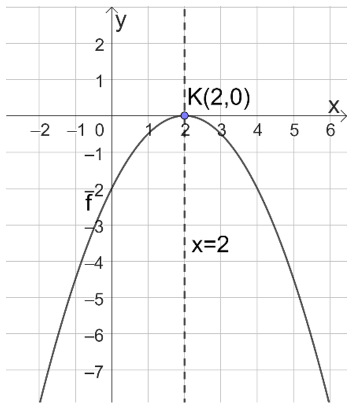
α) $f(x)=-2x^2+8x-6$ που φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



Διαπιστώνουμε ότι η γραφική παράσταση είναι παραβολή και:

- Έχει κορυφή το σημείο $K(2,2)$
- Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=2$
- Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2,+\infty)$
- Παρουσιάζει μέγιστη τιμή στο $x_0=2$ την τιμή $f(2)=2$
- Τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία με τετμημένες $x_1=1$ και $x_2=3$ που είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ δηλαδή της εξίσωσης $-2x^2+8x-6=0$, αφού $f(1)=0$ και $f(3)=0$
- Οι τιμές της είναι αρνητικές για $x<1$ ή $x>3$ και θετικές για $1<x<3$

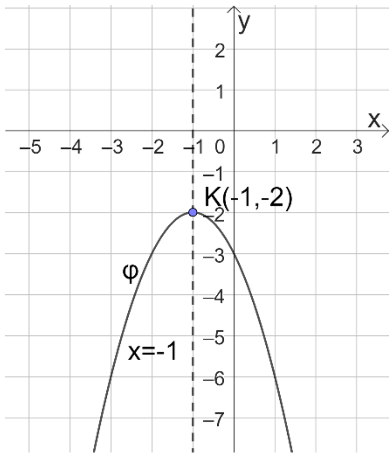
β) $h(x)=-0{,}5x^2+2x-2$ που φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



Διαπιστώνουμε ότι η γραφική παράσταση είναι παραβολή και:

- Έχει κορυφή το σημείο $K(2,0)$
- Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=2$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,+\infty)$
- Παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x_0=2$ την τιμή $h(2)=0$
- Εφάπτεται στον άξονα x΄x στο σημείο με τετμημένη $x_0=2$ που είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$ δηλαδή της εξίσωσης $0{,}5x^2-2x+2=0$, αφού $h(2)=0$
- Οι τιμές της είναι θετικές για κάθε τιμή του $x\neq 2$

γ) $\varphi(x)=-x^2-2x-3$ που φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

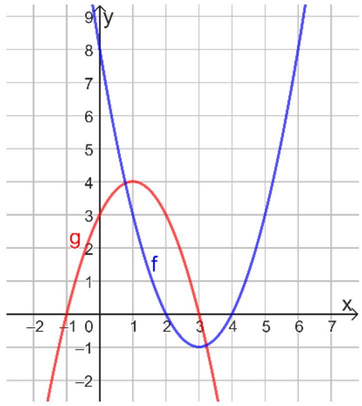


Διαπιστώνουμε ότι η γραφική παράσταση είναι παραβολή και:

- Έχει κορυφή το σημείο $K(-1,-2)$
- Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=-1$
- Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,+\infty)$
- Παρουσιάζει μέγιστη τιμή στο $x_0=-1$ την τιμή $\varphi(-1)=2$
- Δεν τέμνει τον άξονα x΄x οπότε η εξίσωση $\varphi(x)=0$ δεν έχει ρίζες
- Οι τιμές της είναι αρνητικές για κάθε τιμή του x

Θέματα κριτικής σκέψης

1) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f (μαύρο χρώμα) και g (κόκκινο χρώμα).



α) Να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης:

i) $B = f(1)\cdot f(3)\cdot f(5)$

ii) $\Gamma = g(-2)\cdot g(1)\cdot g(5)$

iii) $A = f(\pi)\cdot g(\pi)$

β) Αν $\kappa < -1$ και $\lambda > 3$ να δείξετε ότι: $\kappa\cdot g(\kappa) > \lambda\cdot g(\lambda)$

γ) Υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες και οι δύο συναρτήσεις παίρνουν θετικές τιμές; Αν ναι, σε ποιο διάστημα ανήκουν οι τιμές του x;

Λύση

α) Από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και g προκύπτει ότι:

i) $f(1)=4>0$, $f(3)=-1<0$, $f(5)=3>0$. Άρα $B<0$

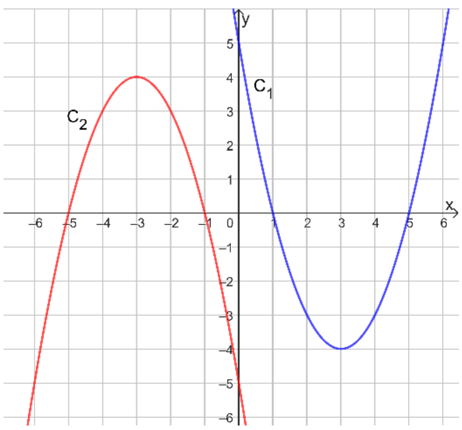
ii) $g(-2)=-2<0$, $g(1)=4>0$, $g(5)<0$. Άρα $\Gamma>0$

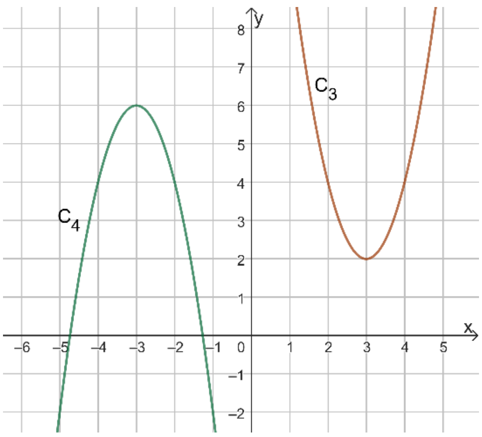
iii) $f(\pi)<0$, $g(\pi)<0$. Άρα $A>0$

β) $\kappa<-1<0$, $g(\kappa)<0$, $\lambda>3>0$, $g(\lambda)<0$. Άρα $\kappa\cdot g(\kappa)>0$ και $\lambda\cdot g(\lambda)<0$. Οπότε $\kappa\cdot g(\kappa)>\lambda\cdot g(\lambda)$

γ) Ναι, είναι οι τιμές του x που ανήκουν στο διάστημα $(-1,2)$

2) Οι παρακάτω καμπύλες C_1, C_2, C_3 και C_4 είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $\varphi_1(x)=x^2-6x+\gamma_1$, $\varphi_2(x)=2x^2-12x+\gamma_2$, $\varphi_3(x)=-x^2-6x+\gamma_3$ και $\varphi_4(x)=-2x^2-12x+\gamma_4$ χωρίς να είναι στην ίδια σειρά.
Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε συνάρτηση να αντιστοιχεί στη σωστή γραφική παράσταση





φ_1	φ_2	φ_3	φ_4

Λύση

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
C_1	C_3	C_2	C_4

2.4 Τριγωνομετρία

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο αυτή;

Στη παράγραφο αυτή θα:

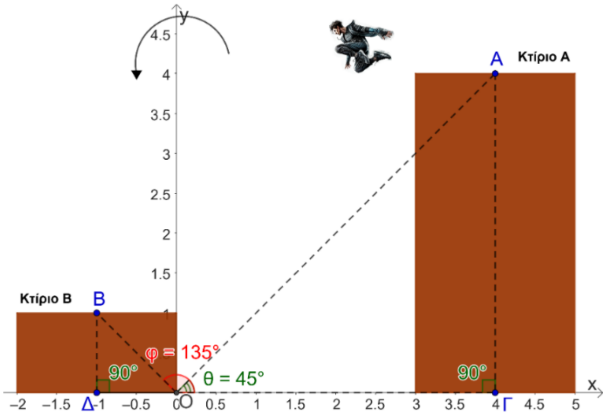
1) Ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας μεταξύ 0° και 360° με τη βοήθεια συστήματος συντεταγμένων. **(ΠΜΑ: Αλ.Σρ.10.10)**

2) Αποδείξουμε τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες ($\varepsilon\varphi x = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $\sigma\varphi x = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$, $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$) και θα υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας όταν ένας από αυτούς είναι γνωστός. **(ΠΜΑ: Αλ.Σρ.10.11)**

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ. 74)

Η Δραστηριότητα καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σρ.10.10

Η Ειρήνη ακολούθησε στη Σαντορίνη το φίλο της Νίκο, για να τον εμψυχώσει, καθώς συμμετέχει στον ετήσιο διαγωνισμό parkour. Καθώς όμως της αρέσουν τα Μαθηματικά, αποφασίζει να δει αν μπορεί να τα συνδυάσει με το συγκεκριμένο άθλημα. Ανεβαίνει στο καμπαναριό της Εκκλησίας και παρατηρεί τις διάφορες θέσεις του Νίκου στις ταράτσες των σπιτιών. Ταυτόχρονα, θεωρεί κατάλληλο σύστημα Καρτεσιανών αξόνων με αρχή τη θέση της ίδιας (στο σημείο Ο), οπότε και βλέπει τις θέσεις του φίλου της μέσω συντεταγμένων.



Α. Καθώς ο Νίκος βρίσκεται στο Κτίριο Α, γνωρίζοντας τα μήκη των πλευρών **ΟΓ** και **ΑΓ** η Ειρήνη χρησιμοποίησε τον τριγωνομετρικό αριθμό **εφαπτομένη** και υπολόγισε τη γωνία ΑΟΓ, η οποία είναι τελικά **45** μοίρες (**οξεία** γωνία).

Β. Στη συνέχεια παρατήρησε ότι αν: Θεωρήσει τις συντεταγμένες του σημείου Α που είναι **(4,4)** και μετρήσει την απόσταση ΟΑ χρησιμοποιώντας το **Πυθαγόρειο** Θεώρημα, θα έχει $(ΟΑ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΟΓ)^2$ $= 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$, δηλαδή: $(ΟΑ) = \sqrt{32}$

Τότε, πειραματιζόμενη βρήκε ότι για το ημίτονο της οξείας γωνίας θ, ο λόγος της τεταγμένης του σημείου Α προς την απόσταση ΟΑ δίνει το σωστό αποτέλεσμα: $\eta\mu\theta = \dfrac{ΑΓ}{ΟΑ} = \dfrac{4}{\sqrt{32}} = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad (= \eta\mu 45^\circ)$

Αντίστοιχα έκανε το πείραμα για το συνημίτονο της γωνίας θ, με το λόγο της τετμημένης του σημείου Α προς την απόσταση ΟΑ και βρήκε πάλι σωστό αποτέλεσμα : $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{ΟΓ}{ΟΑ} = \dfrac{4}{\sqrt{32}} = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad (= \sigma\upsilon\nu 45^\circ)$

Τέλος, το επανάλαβε για την εφαπτομένη της γωνίας θ, χρησιμοποιώντας το λόγο της τεταγμένης προς την τετμημένη του σημείου Α και βρήκε για άλλη μία φορά το σωστό αποτέλεσμα: $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{O\Gamma}} = \frac{4}{4} = 1 \quad \left(= \varepsilon\varphi 45^{o}\right)$

Έτσι, διατυπώνει την ακόλουθη εικασία, ως έναν άλλο τρόπο υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας: «Χρησιμοποιώ τις συντεταγμένες του σημείου $\mathrm{A}\left(x_{A}, y_{A}\right)$ (που βρίσκεται στην **τελική** πλευρά της οξείας γωνίας ΓΟΑ), καθώς και την απόσταση ΟΑ για να ορίσω τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$\eta\mu\theta = \frac{y_{A}}{\mathrm{OA}}$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x_{A}}{\mathrm{OA}}$, $\varepsilon\varphi\theta = \frac{y_{A}}{x_{A}}$ »

Γ. Στη συνέχεια η Ειρήνη, παρακολουθώντας με το βλέμμα της το Νίκο να περνάει στο Κτίριο Β, αναρωτιέται αν η εικασία της θα είναι λειτουργική και στην περίπτωση όπου η γωνία είναι **αμβλεία** (εδώ 135^{o}). Δοκιμάζει τη μέθοδό για τη γωνία ΓΟΒ και έχει:

- Συντεταγμένες σημείου Β: **(-1, 1)**
- Μήκος τμήματος ΟΒ: $(\mathrm{OB})^{2} = 1^{2} + 1^{2}$, δηλαδή: $(\mathrm{OB}) = \sqrt{2}$
- $\eta\mu\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{1}{-1} = -1$

Τα αποτελέσματα που πήρε την έδωσαν μεγάλη χαρά, καθώς χρησιμοποιώντας πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών, επιβεβαίωσε πως ήταν τα σωστά, για τη γωνία των 135^{o}!

Η δραστηριότητα ξεκινά με μια απλή εφαρμογή τριγωνομετρικών αριθμών σε ορθογώνιο τρίγωνο, ενώ στη συνέχεια ο μαθητής θα πρέπει να παρατηρήσει πως παίρνει τα ίδια αποτελέσματα, όταν χρησιμοποιήσει κατάλληλα τις συντεταγμένες σημείου στην τελική πλευρά της οξείας γωνίας. Τέλος, επιχειρεί να εφαρμόσει την εικασία του και σε αμβλεία γωνία και το κάνει με επιτυχία!

Κεφάλαιο 3ο

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

3.1 Ταυτότητες

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο αυτή;

Στην παράγραφο αυτή θα:

1) Αποδείξουμε τις ταυτότητες που σχετίζονται με τις παραστάσεις $(\alpha \pm \beta)^3$ και $\alpha^3 \pm \beta^3$ **(ΠΜΑ: Αλ.Π.10.1)**

2) Χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες και τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στον μετασχηματισμό αλγεβρικών παραστάσεων **(ΠΜΑ: Αλ.Π.10.2)**

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ.86)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Π.10.1

Ο κύβος έχει πλευρά $\alpha+\beta$. Ο όγκος του είναι: $V=(\alpha+\beta)^3$. Ο κύβος αποτελείται από ένα παραλληλεπίπεδο (στο βάθος) με βάση τετράγωνο πλευράς α και ύψος $\alpha+\beta$, από ένα κύβο (μπροστά) πλευράς β, από δύο παραλληλεπίπεδα με βάση τετράγωνο πλευράς α και ύψος β και τρία παραλληλεπίπεδα με βάση τετράγωνο πλευράς β και ύψος α.

Άρα: $V=\alpha^2\cdot(\alpha+\beta)+\beta^3+2\cdot\alpha^2\cdot\beta+3\cdot\beta^2\cdot\alpha= \alpha^3+\alpha^2\beta+\beta^3+2\alpha^2\beta+3\beta^2\alpha=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

Παρατηρούμε ότι: $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

Αλγεβρικά:

$$(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta)=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\cdot(\alpha+\beta)=\alpha^3+\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^2\alpha+\beta^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

Μια πιο αναλυτική παρουσίαση της εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ.86)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Π.10.1

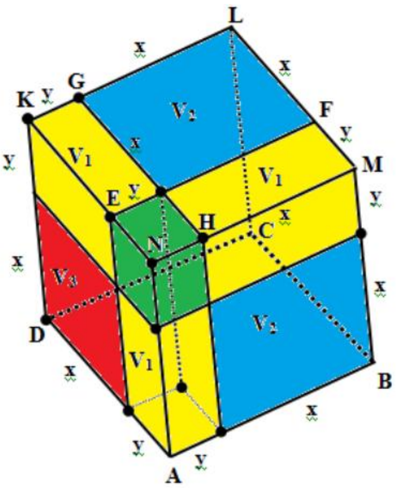
ΜΕΡΟΣ Α

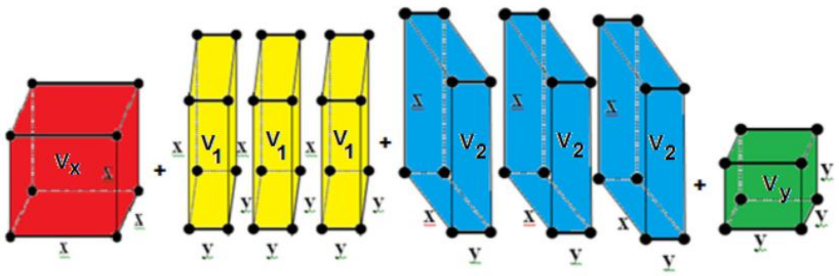
Θεωρούμε κύβο διάστασης $(x+y)$ μονάδων τον οποίο διαμερίζουμε σε οκτώ γεωμετρικά στερεά: δύο διαφορετικούς κύβους και έξι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, σχεδιάζοντας τα ευθύγραμμα τμήματα EF και GH. Ο όγκος του κύβου είναι ίσος με: $V_{(x+y)} = ...$, ενώ για τα οκτώ γεωμετρικά στερεά της διαμέρισης έχουμε:

$V_x = ...$, $V_1 = ...$, $V_2 = ...$, $V_y = ...$, οπότε ο συνολικός όγκος θα ισούται με:

$V_{ολικο} = ... + ... + ... + ... = ... + ... + ... + ...$

όπου ο συνολικός όγκος προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους όγκων των στερεών διαμέρισης:

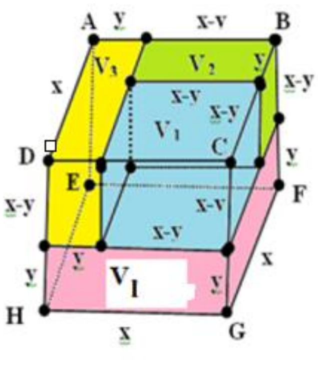


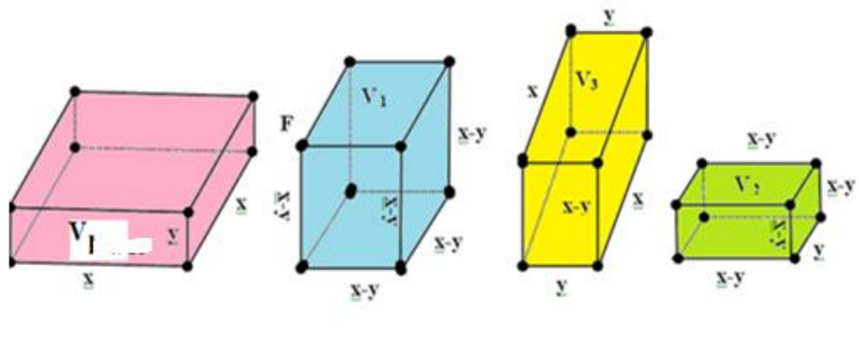


Τι παρατηρείτε, σε σχέση με τον όγκο του αρχικού κύβου και του αθροίσματος των όγκων των επιμέρους στερεών;

ΜΕΡΟΣ Β

Με δεδομένο τον κύβο του σχήματος, και την αντίστοιχη διαμέρισή του στα ακόλουθα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα:





Να διατυπώσετε μια εικασία για το ποια ταυτότητα μπορεί να περιγράφει η παραπάνω διαδικασία.

ΜΕΡΟΣ Γ

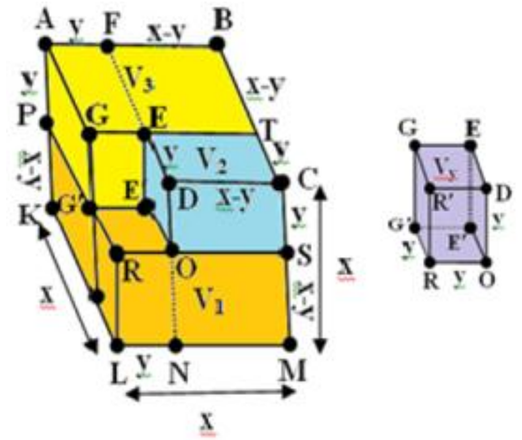
Θεωρούμε κύβο διάστασης x μονάδων από τον οποίο αφαιρούμε κύβο διάστασης y μονάδων.

Οι όγκοι των κύβων με μήκη πλευρών x, y είναι ίσοι με:

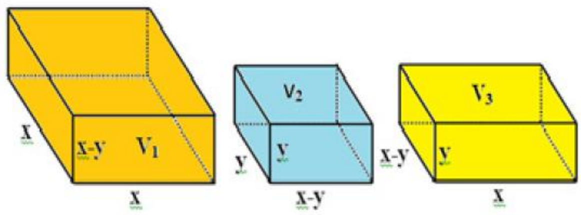
$V_x = \dots\dots\dots\dots,\quad V_y = \dots\dots\dots\dots$

ενώ ο όγκος του στερεού που απομένει, υπολογίζεται αφού πρώτα αφαιρέσουμε από τον όγκο του αρχικού κύβου τον όγκο του κύβου πλευράς y:

$V = V_x - V_y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **(*)**



Αν διαμερίσουμε το στερεό που απέμεινε σε τρία ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα, οι αντίστοιχοι όγκοι θα είναι ίσοι με:



(1) (2) (3)

$V_1 = \dots\dots\dots\dots,\quad V_2 = \dots\dots\dots\dots,\quad V_3 = \dots\dots\dots\dots$

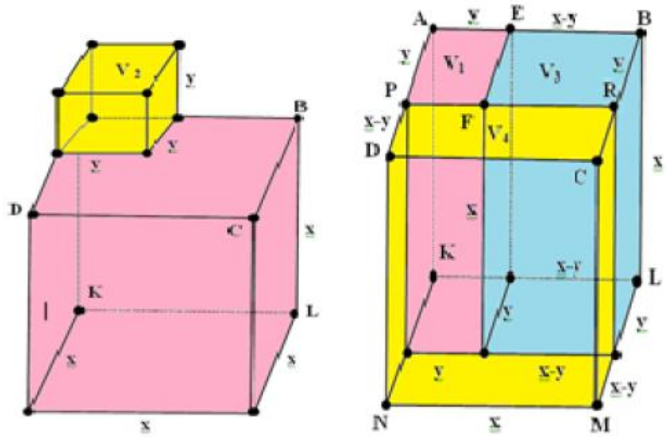
Αν τώρα αθροίσουμε τους όγκους των στερεών (1), (2) και (3) θα έχουμε:

$V = V_1 + V_2 + V_3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **(!)**

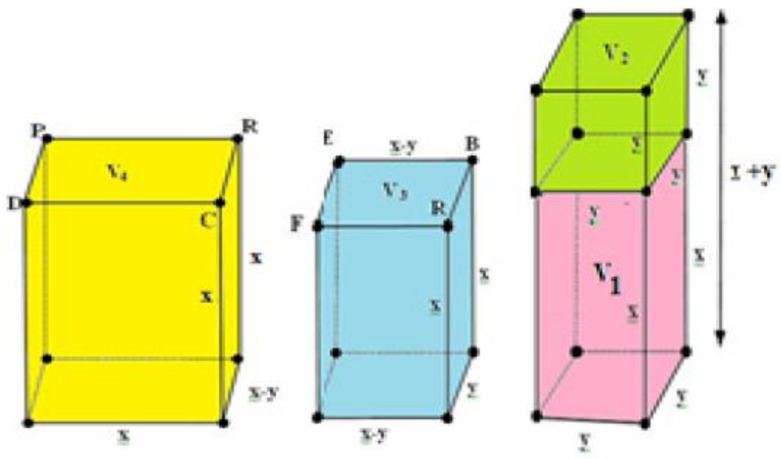
Τι παρατηρείτε από τις σχέσεις (*) και (!), οι οποίες και οι δυο περιγράφουν τον όγκο του στερεού που απέμεινε;

ΜΕΡΟΣ Δ

Με δεδομένους τους ακόλουθους κύβους:



και την αντίστοιχη διαμέρισή τους στα ακόλουθα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα:



Να διατυπώσετε μια εικασία για το ποια ταυτότητα μπορεί να περιγράφει η παραπάνω διαδικασία.

Ανάλυση της αναλυτικής παρουσίασης της δραστηριότητας (σελ.86)

ΜΕΡΟΣ Α

Με τη βοήθεια του Καθηγητή ή χρησιμοποιώντας προηγούμενη γνώση πάνω στον όγκο στερεών, (αλλά και την εποπτεία/διαίσθηση), ο μαθητής μπορεί να συμπληρώσει τους ακόλουθους τύπους:

$\mathbf{V_{x+y}=(x+y)^3}$, $\mathbf{V_x=x^3}$, $\mathbf{V_1=xy^2}$, $\mathbf{V_2=x^2y}$, $\mathbf{V_y=y^3}$ και τελικά να συνθέσει την ταυτότητα:

$\mathbf{(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}$

ΜΕΡΟΣ Β

Με παρόμοια διαδικασία κι επιχειρηματολογία, ο μαθητής αναμένουμε να ανακαλύψει την ταυτότητα:

$\mathbf{(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}$.

ΜΕΡΟΣ Γ

Με τη βοήθεια του Καθηγητή ή χρησιμοποιώντας προηγούμενη γνώση πάνω στον όγκο στερεών, (αλλά και την εποπτεία/διαίσθηση), ο μαθητής μπορεί να συμπληρώσει τους ακόλουθους τύπους:

$\mathbf{V_x=x^3}$, $\mathbf{V_y=y^3}$, $\mathbf{V=V_x-V_y=x^3-y^3}$, $\mathbf{V_1=x^2(x-y)}$, $\mathbf{V_2=y^2(x-y)}$, $\mathbf{V_3=xy(x-y)}$

και τελικά να συνθέσει την ταυτότητα: $\mathbf{x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)}$.

ΜΕΡΟΣ Δ

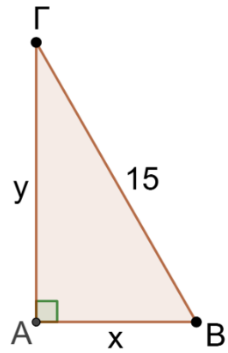
Με παρόμοια διαδικασία κι επιχειρηματολογία, ο μαθητής αναμένουμε να ανακαλύψει την ταυτότητα:

$\mathbf{x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)}$

Θέμα Κριτικής Σκέψης

α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\alpha^2+\beta^2-(\alpha-\beta)^2=2\alpha\beta$

β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές που διαφέρουν 5cm. Να βρεθεί το εμβαδόν του.



Λύση

α) $\alpha^2+\beta^2-(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)=2\alpha\beta$

β) Το εμβαδόν του τριγώνου είναι:

$$E=\frac{x\cdot y}{2}\overset{i)}{=}\frac{\frac{1}{2}\left[x^2+y^2-(x-y)^2\right]}{2}=\frac{1}{4}\cdot(15^2-5^2)=\frac{1}{4}\cdot 200=50\ cm^2$$

Κεφάλαιο 4ο

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

4.1 Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο αυτή;

Στην παράγραφο αυτή θα επιλύσουμε απλές παραμετρικές εξισώσεις 1^{ου} βαθμού και ρεαλιστικά προβλήματα που ανάγονται σε εξισώσεις αυτής της μορφής **(ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.1).**

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ.95)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.1

i) Ο Enrico έθεσε $P=10$ και $\delta=40$ και υπολόγισε το λ: $10=\lambda\cdot 40-34$ άρα $\lambda=\frac{44}{40}=1,1$

ii) Για $\lambda=1,1$, η οικογενειακή πίτσα των 55 εκατοστών θα κοστίζει: $P=1,1\cdot 55-34=26,5$ ευρώ.

iii) Αν έφτιαχνε πίτσες διαμέτρου το πολύ 30 εκατοστών, τότε θα είχε το ακόλουθο πρόβλημα τιμολόγησης: (έστω $\delta=30$) $P=1,1\cdot 30-34=33-34=-1<0$

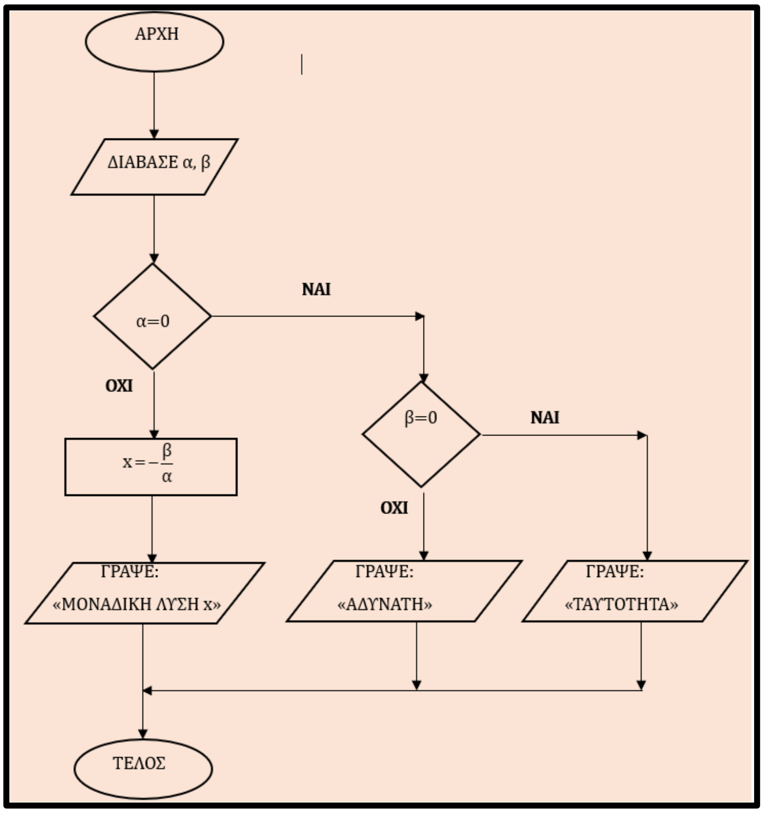
iv) Το κόστος παρασκευής πίτσας διαμέτρου δ είναι: C = 0,1δ. Το περιθώριο κέρδους K είναι η διαφορά ανάμεσα στην τιμή πώλησης και στο κόστος: $K=P-C=(1,1\cdot\delta-34)-0,1\cdot\delta=\delta-34$. Άρα το περιθώριο κέρδους αυξάνεται γραμμικά καθώς αυξάνεται η διάμετρος της πίτσας. Για να είναι θετικό το περιθώριο κέρδους: $K>0$, δηλαδή: $\delta-34>0$, που σημαίνει $\delta>34$

Συμπέρασμα:

Το περιθώριο κέρδους είναι θετικό για διαμέτρους μεγαλύτερες από 34 cm. Είναι μηδενικό για δ = 34 cm και αρνητικό για δ < 34 cm.

Επιπλέον δραστηριότητα 1

Ο Καθηγητής Πληροφορικής Λυκείου, κατά την παράδοση της παραγράφου “Η Έννοια του Αλγορίθμου» στους μαθητές του, έδωσε το ακόλουθο διάγραμμα ροής, για την επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x+\beta=0$:



Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας για παράδειγμα την εξίσωση: $\lambda(\lambda-1)x+(1-\lambda)(\lambda-2)=0$, όπου $\lambda\in R$, ζήτησε από τους μαθητές του να απαντήσουν στα ακόλουθα ερωτήματα:

i) Το ρόλο του α της εξίσωσης,

στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχει ο………………

ii) Το ρόλο του β της εξίσωσης,

στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχει ο………………

iii) Για τις ακόλουθες τιμές του $\lambda\in R$, να

διατυπώσετε τα συμπεράσματά σας για την εξίσωση, ελέγχοντας τη λειτουργία του διαγράμματος ροής:

1) **Για $\lambda=-1$, η εξίσωση: ……………………………………………………………………………………………………**
2) **Για $\lambda=0$, η εξίσωση ……………………………………………………………………………………………………**
3) **Για $\lambda=1$ η εξίσωση ……………………………………………………………………………………………………**
4) **Για $\lambda=2$: η εξίσωση ……………………………………………………………………………………………………**

iv) Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$.

v) Θα μπορούσαμε να απλοποιήσουμε αρχικά τον παράγοντα (λ-1) και η εξίσωση να λυθεί αφού πάρει τη μορφή $\lambda x=\lambda-2$;

Ανάλυση της δραστηριότητας

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.1

i), ii) Με τη βοήθεια του Καθηγητή και του δεδομένου διαγράμματος ροής, οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίσουν ότι $\alpha = \lambda(\lambda-1)$ και $\beta = (\lambda-1)(\lambda-2)$.

iii) Αντίστοιχα, για τις τιμές της δραστηριότητας θα έχουμε:

(1) λ=-1: η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = 3$

(2) λ=0: η εξίσωση είναι αδύνατη

(3) λ=1: η εξίσωση είναι ταυτότητα

(4) λ=2: η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = 0$

iv) Αναμένουμε τη γενική διερεύνηση, σύμφωνα με το διάγραμμα ροής.

v) Δεν είναι σωστό, αφού έτσι θα περιορίσουμε το εύρος της διερεύνησης.

Επιπλέον δραστηριότητα 2

A) Ο διαχειριστής μιας πολυκατοικίας προτίθεται να προμηθευτεί πετρέλαιο θέρμανσης. Διαθέτει για το σκοπό αυτό 1200 ευρώ και απευθύνεται σε τρεις προμηθευτές. Ο πρώτος πουλάει με 1,8 ευρώ το λίτρο. Ο δεύτερος με 1,75 και ο τρίτος με 1.68 το λίτρο. Αν αγοράσει χ τα λίτρα πετρελαίου βρείτε τη τιμή του χ αν ψωνίσει από καθέναν προμηθευτή χωριστά;

B) Στο παραπάνω πρόβλημα η ποσότητα χ του πετρελαίου που θα αγοραστεί εξαρτάται προφανώς από τη τιμή πώλησης κάθε προμηθευτή. Αν συμβολίσουμε με α τι τιμή πώλησης κάθε πωλητή να σχηματίσετε μια εξίσωση ως προς x που θα εκφράζει τη παραπάνω ενέργεια. Στην εξίσωση αυτή ποιος είναι ο ρόλος του χ και ποιος του α;

Ανάλυση της δραστηριότητας

Το σύνολο της δραστηριότητας εξυπηρετεί το ΠΜΑ Αλ.Σχ, 10.1.

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, με ένα απλό αλλά ρεαλιστικό πρόβλημα εισάγουμε τους μαθητές στην έννοια της παραμέτρου. Δηλαδή μιας μεταβλητής α που βρίσκεται στην εξίσωση αλλά δεν είναι ο άγνωστος της εξίσωσης.

Η λύση όμως της εξίσωσης εξαρτάται από αυτή τη μεταβλητή που λέγεται **παράμετρος** της εξίσωσης:

A) Στο ερώτημα αυτό είναι εύκολο να δημιουργήσουν τις εξισώσεις που θα δώσουν τη λύση και στις τρεις περιπτώσεις Για τον πρώτο προμηθευτεί ισχύει: $1{,}8 \cdot x = 1200$ που σημαίνει $x = 1200 \div 1{,}8 = 666{,}6$ λίτρα. Για τον δεύτερο προμηθευτεί ισχύει: $1{,}75 \cdot x = 1200$ που σημαίνει $x = 1200 \div 1{,}75 = 685{,}7$ λίτρα και για τον τρίτο $1{,}68 \cdot x = 1200$ που σημαίνει $x = 1200 \div 1{,}68 = 714{,}2$ λίτρα

B) Αν συμβολίσουμε τώρα με α (παράμετρος) τη τιμή πώλησης κάθε προμηθευτή τότε η εξίσωση ως προς χ, δηλαδή ως προς τη ποσότητα του πετρελαίου που θα αγοράσει ο διαχειριστής γίνεται: $\alpha \cdot x = 1200$ με $\alpha = 1{,}8$ ή $\alpha = 1{,}75$ ή $\alpha = 1{,}68$.

Παρατηρούμε ότι στην εξίσωση αυτή υπάρχουν δύο μεταβλητές: α και χ. Η μεταβλητή x είναι ο άγνωστος της οποίας η τιμή εξαρτάται από τη τιμή της μεταβλητής α που λέγεται παράμετρος (παρα- μετρώ) και παίρνει τιμές από το σύνολο: $\{1{,}8\ ,\ 1{,}75\ ,\ 1{,}68\}$. Σε κάθε περίπτωση η λύση είναι μοναδική και ίση με $x=\frac{1200}{\alpha}$.

Θέματα Κριτικής Σκέψης

1) Να λυθεί σύντομα η εξίσωση: $(x-1)^2+(2x-2)^2=0$

Λύση

Επειδή $(x-1)^2\geq$ και $(2x-2)^2\geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x , η εξίσωση $(x-1)^2+(2x-2)^2=0$ ισοδυναμεί με την $(x-1)^2=0$ και $(2x-2)^2=0$ δηλαδή $x=1$

2) Να λυθεί σύντομα η εξίσωση: $(x-2)^3+(3x-1)^3+(3-4x)^3=0$ (1)

(Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα EULER)

Λύση

Επειδή $(x-2)+(3x-1)+(3-4x)=0$, η εξίσωση (1) ισοδυναμεί με την $3(x-2)\cdot(3x-1)\cdot(3-4x)=0$ οπότε $x-2=0$ ή $3x-1=0$ ή $3-4x=0$ δηλαδή $x=2$ ή $x=\frac{1}{3}$ ή $x=\frac{3}{4}$

3) Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x-2026}{1}+\frac{x-2025}{2}+\frac{x-2024}{3}=\frac{x-2023}{4}+\frac{x-2022}{5}+\frac{x-2021}{6}$

Λύση

Παρατηρούμε ότι: 2026+1=2025+2=2024+3=2022+5=2021+6=2027

Οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\left(\frac{x-2026}{1}-1\right)+\left(\frac{x-2025}{2}-1\right)+\left(\frac{x-2024}{3}-1\right)=\left(\frac{x-2023}{4}-1\right)+\left(\frac{x-2022}{5}-1\right)+\left(\frac{x-2021}{6}-1\right)$$ οπότε

$$\left(\frac{x-2027}{1}\right)+\left(\frac{x-2027}{2}\right)+\left(\frac{x-2027}{3}\right)=\left(\frac{x-2027}{4}\right)+\left(\frac{x-2027}{5}\right)+\left(\frac{x-2027}{6}\right)$$ δηλαδή

$$(x-2027)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=(x-2027)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$$ που σημαίνει

$$(x-2027)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=0$$ επομένως $x-2027=0$ άρα $x=2027$

4) Δίνεται η εξίσωση: $-4x+\lambda x+2\mu=8$. Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών παραμέτρων λ, μ, η παραπάνω εξίσωση:

- **i)** έχει μοναδική λύση
- **ii)** είναι αδύνατη
- **iii)** είναι αόριστη και ταυτοτική
- **iv)** έχει τουλάχιστον μία λύση

Λύση

Η εξίσωση παίρνει τη μορφή $(\lambda-4)x=8-2\mu$

i) Έχει μοναδική λύση όταν $\lambda-4\neq 0$ δηλαδή όταν $\lambda\neq 4$ και οποιαδήποτε πραγματική τιμή του μ

ii) Είναι αδύνατη όταν $\lambda=4$ και $\mu-4\neq 0$ δηλαδή όταν $\lambda=4$ και $\mu\neq 4$

iii) Επειδή το σύνολο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}$ είναι αόριστη και ταυτοτική όταν $\lambda=\mu=4$

iv) Έχει μια τουλάχιστον λύση όταν δεν είναι αδύνατη δηλαδή όταν $\lambda\neq 4$ και οποιαδήποτε πραγματική τιμή του μ ή όταν $\lambda=\mu=4$

4.2 Ανισότητες – Ανισώσεις 1ου βαθμού και Εξισώσεις – Ανισώσεις με απόλυτη τιμή

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο αυτή;

Στην παράγραφο αυτή:

1) Θα διερευνήσουμε τις ιδιότητες που συνδέουν τη διάταξη με τις πράξεις και αποδεικνύουμε ανισοτικές σχέσεις (ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.2)
2) Θα επιλύσουμε αλγεβρικά και γεωμετρικά απλές εξισώσεις, ανισώσεις και προβλήματα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής (ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.3)

Ιδιότητες ανισοτικών σχέσεων- διάταξη και πράξεις

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ.102)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.2

Α) Ο Θωμάς εξετάζει δύο χώρους στάθμευσης:

- Χώρος Α: 5 ευρώ για την πρώτη ώρα και 1,2 ευρώ για κάθε επιπλέον ώρα.
- Χώρος Β: 4 ευρώ για την πρώτη ώρα και 1,6 ευρώ για κάθε επιπλέον ώρα.

Για χρόνο στάθμευσης t ωρών, με $t \geq 1$, τα κόστη είναι:

$$A(t) = 5 + 1{,}2 \cdot (t-1) = 1{,}2t + 3{,}8\,, \quad B(t) = 4 + 1{,}6 \cdot (t-1) = 1{,}6t + 2{,}4$$

Παρατήρηση:

Οι τύποι αυτοί ισχύουν για παραμονή τουλάχιστον μίας ώρας. Για τη δραστηριότητα οι ζητούμενοι χρόνοι είναι 2, 3, 3,5, 4 και 5 ώρες, άρα οι τύποι εφαρμόζονται κανονικά.

i) Κόστος για 2, 3, 3,5, 4 και 5 ώρες

Χρόνος t (ώρες)	Κόστος Α: Α(t)	Κόστος Β: Β(t)	Συμφέρει
2	5 + 1,2·1 = 6,20 ευρώ	4 + 1,6·1 = 5,60 ευρώ	Β
3	5 + 1,2·2 = 7,40 ευρώ	4 + 1,6·2 = 7,20 ευρώ	Β
3,5	5 + 1,2·2,5 = 8,00 ευρώ	4 + 1,6·2,5 = 8,00 ευρώ	Ισοδύναμα
4	5 + 1,2·3 = 8,60 ευρώ	4 + 1,6·3 = 8,80 ευρώ	Α
5	5 + 1,2·4 = 9,80 ευρώ	4 + 1,6·4 = 10,40 ευρώ	Α

Συμπέρασμα:

Για 2 και 3 ώρες συμφέρει ο χώρος Β. Για 3,5 ώρες τα δύο κόστη είναι ίσα. Για 4 και 5 ώρες συμφέρει ο χώρος Α.

ii) Πόσες **ώρες τουλάχιστον πρέπει να παραμείνει ώστε να συμφέρει ο χώρος Α;**

Θέλουμε το κόστος του χώρου Α να είναι μικρότερο από το κόστος του χώρου Β: $A(t) < B(t)$, δηλαδή:

$1{,}2t + 3{,}8 < 1.6t + 2{,}4$, οπότε: $t > 3{,}5$

Άρα ο χώρος Α συμφέρει όταν ο Θωμάς παραμείνει περισσότερο από 3,5 ώρες.

Καθώς μετράμε ολόκληρες ώρες, πρέπει να παραμείνει τουλάχιστον 4 ώρες.

Β) Το μήκος μιας βίδας μετρήθηκε 5 cm. Το σφάλμα μέτρησης είναι το πολύ 0,1 cm. Αν δ είναι το πραγματικό μήκος της βίδας, τότε το πραγματικό μήκος μπορεί να αποκλίνει από τα 5 cm το πολύ κατά 0,1 cm.

i) Διάστημα στο οποίο ανήκει το πραγματικό μήκος δ: $5-0{,}1\le\delta\le5+0{,}1$, που σημαίνει ότι: $4{,}9\le\delta\le5{,}1$. Άρα το πραγματικό μήκος της βίδας ανήκει στο διάστημα [4,9 , 5,1] cm.

ii) Μαθηματικό μοντέλο με απόλυτη τιμή

Η απόσταση του πραγματικού μήκους δ από το επιθυμητό μήκος 5 cm είναι: $|\delta-5|$. Επειδή το σφάλμα είναι το πολύ 0,1 cm, έχουμε: $|\delta-5|\le0{,}1$. Αυτό είναι το ζητούμενο μαθηματικό μοντέλο. Εκφράζει ότι το πραγματικό μήκος της βίδας δεν απέχει από τα 5 cm περισσότερο από 0,1 cm.

iii) Αλγεβρική επιβεβαίωση ελάχιστου και μέγιστου μήκους

Ξεκινάμε από την ανισότητα: $|\delta-5|\le0{,}1$ που σημαίνει ότι: $-0{,}1\le\delta-5\le0{,}1$, δηλαδή: $5-0{,}1\le\delta\le5+0{,}1$ και τελικά: $4{,}9\le\delta\le5{,}1$. Άρα το ελάχιστο δυνατό πραγματικό μήκος είναι 4,9 cm και το μέγιστο δυνατό πραγματικό μήκος είναι 5,1 cm.

Ανισώσεις πρώτου βαθμού

Ανάλυση δραστηριότητας (σελ.105)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.2

Με τη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές/τριες θα δούνε παραστατικά την επίλυση μιας ανίσωσης 1ου βαθμού:

Α) Ερμηνεύοντας το σχ.1 οι μαθητές και οι μαθήτριες θα γράψουν την ανισοτική σχέση: $2x+3<x+5$ (ή $x+5>2x+3$)

Β)

- Κάνοντας το ίδιο για το σχ.2 θα γράψουν την ανισοτική σχέση: $2x+1<5$
- Αν παρατηρήσουν το σχ.3 τα παιδιά θα δουν ότι αν βγάλουν και από τους δύο δίσκους ένα κουτί του ενός κιλού (αφαιρέσουν τον αριθμό ένα) η σχέση (ανισότητα) δεν αλλάζει. Έτσι θα γράψουν: $2x+1-1<5-1$ που σημαίνει ότι $2x<4$.
- Στη συνέχεια παρατηρώντας το σχ.4 θα δουν ότι αν μοιράσουμε τα βάρη και των δύο δίσκων στη μέση (διαιρέσουν με δύο) η σχέση (ανισότητα) πάλι δεν αλλάζει. Έτσι θα γράψουν: $\frac{2x}{2}<\frac{4}{2}$ που σημαίνει $x<2$

4.3 Εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο αυτή;

Στην παράγραφο αυτή θα μάθουμε:

1) Να επιλύουμε εξισώσεις της μορφής: $x^{\nu}=\alpha$ **(ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.4)**

2) Να επιλύουμε αλγεβρικά εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού **(ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.5)**

3) Να επιλύουμε απλές εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού **(ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.6)**

4) Να χρησιμοποιούμε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων **(ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.7)**

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ. 113)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει τα ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.5 και Αλ.Σχ.10.7

Για το ερώτημα Α) θα μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα με μια πολυωνυμική παράσταση 2ου βαθμού για να λύσουμε στη συνέχεια την εξίσωση:

Α) Ο θεατής σκέφτεται έναν αριθμό έστω x. Τον τετραγωνίζει: x^2. Από το τετράγωνο αφαιρεί το διπλάσιο του αριθμού x: x^2-2x. Στη συνέχεια από το αποτέλεσμα αφαιρεί τον αριθμό 3: x^2-2x-3. Έτσι σχηματίζουμε τη συνάρτηση: $\varphi(x)=x^2-2x-3$. Για $x=5$, ο θεατής έβγαλε το αποτέλεσμα: $\varphi(5)=5^2-2\cdot5-3=12$.

Β) Αν ο μάγος άλλαζε τον αριθμό 3 με τον αριθμό 4 δηλαδή η συνάρτηση γινόταν: $\varphi(x)=x^2-2x-4$, τότε ο θεατής θα έβρισκε 11 αλλά ο μάγος πάλι θα μάντευε τον αριθμό 5 (γιατί;).

Την απάντηση θα δώσει το επόμενο ερώτημα:

Γ) Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $\varphi(x)=x^2-2x-3=\left(x^2-2x+1\right)-1-3=(x-1)^2-4$.

Δ) Άρα ο μάγος για να λύσει την εξίσωση: $\varphi(x)=12$ έλυσε την εξίσωση: $(x-1)^2-4=12$ που σημαίνει $(x-1)^2=16$ και συνεπώς $x=5$ ή $x=-3$. Όμως ο μάγος ζήτησε θετικό ακέραιο, οπότε τελικά $x=5$.

Ε) …

Ανάλυση δραστηριότητας (σελ.116)

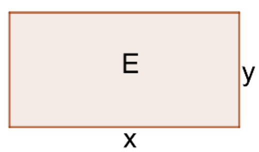
Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.7

Για να υπάρχουν αριθμοί με άθροισμα S και γινόμενο P πρέπει και αρκεί η εξίσωση: $x^2-S\cdot x+P=0$ να έχει λύσεις (ρίζες). Αυτό σημαίνει ότι πρέπει και αρκεί να έχει διακρίνουσα μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.

Δηλαδή $(-S)^2-4P\geq0$, δηλαδή: $S^2\geq4P$. Για παράδειγμα δεν υπάρχουν αριθμοί με άθροισμα 10 και γινόμενο 26 αφού $10^2-4\cdot26=-24<0$.

Εδώ μπορούν να γίνουν προβλήματα εύρεσης μέγιστης και ελάχιστης τιμής αθροίσματος και γινομένου όπως για παράδειγμα το παρακάτω:

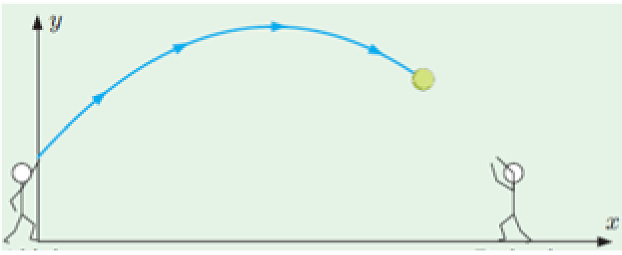
«Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν 16 τ.μ. να βρεθεί αυτό που έχει την ελάχιστη περίμετρο»



Έστω x και y οι διαστάσεις του ζητούμενου ορθογωνίου. Από την υπόθεση ισχύει $E = x \cdot y = 16(= P)$. Επειδή η περίμετρος είναι $\Pi = 2(x_1 + x_2)(= 2 \cdot S)$, το μισό της περιμέτρου (ημιπερίμετρος) θα είναι: $x_1 + x_2(= S)$. Η περίμετρος όμως θα γίνει ελάχιστη όταν η ημιπερίμετρος θα γίνει ελάχιστη. Οι διαστάσεις του ζητούμενου ορθογωνίου θα οι λύσεις της εξίσωσης: $x^2 - Sx + P = 0$, δηλαδή της εξίσωσης: $x^2 - Sx + 16 = 0$. Όμως για να έχει λύση η εξίσωση αυτή πρέπει και αρκεί να ισχύει: $S^2 \geq 4P = 4 \cdot 16 = 64$ που σημαίνει $S \geq 8$. Άρα η ελάχιστη τιμή του S θα είναι $S = 8$. Η εξίσωση τότε γίνεται: $x^2 - 8x + 16 = 0$ που έχει διπλή ρίζα την $x_1 = x_2 = 4$. Άρα ελάχιστη περίμετρο έχει το τετράγωνο με πλευρά 4 μ.μ.

Επιπλέον δραστηριότητα

Δύο φίλοι, ο Βασίλης και ο Κωστής βρίσκονται σε απόσταση 40 μέτρων και θα παίξουν ένα παιχνίδι κατά το οποίο θα πετάνε μια μπάλα ο ένας στον άλλον. Ο Βασίλης ρίχνει πρώτος τη μπάλα, η οποία διαγράφει την τροχιά του παρακάτω σχήματος, όπου x η οριζόντια μετατόπιση και y το ύψος της, σε μέτρα. Ο πίνακας που ακολουθεί, δίνει αντίστοιχες τιμές των x, y, κατά τη διάρκεια του πρώτου πετάγματος της μπάλας.



x (m)	0	5	10	15	20	25	30
y (m)	1.25	10	16.25	20	21.25	20	16.25

i) **Χρησιμοποιώντας λογισμικό Μαθηματικών (π.χ. Geogebra), να παραστήσετε τα σημεία που εμφανίζονται στον πίνακα τιμών, στο Καρτεσιανό επίπεδο.**

ii) **Αναγνωρίζετε κάποια γνώριμη γραφική παράσταση συνάρτησης;**

iii) **Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα;**

iv) **Μπορείτε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που περιγράφει το παιχνίδι;**

v) **Θα φτάσει η μπάλα στον Κωστή, προτού χτυπήσει στο έδαφος και αναπηδήσει;**

Ανάλυση της δραστηριότητας

Τα ερωτήματα i), ii) καλύπτουν το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.7, ενώ το ερώτημα v) της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.5

i), ii) Με τη βοήθεια του Καθηγητή, οι μαθητές πρέπει να μεταγλωττίσουν το πρόβλημα σε γλώσσα Μαθηματικών. Αναμένουμε να αναγνωρίσουν τη γραφική παράσταση μιας παραβολής.

iii) Απλή εφαρμογή που προκύπτει άμεσα από τον πίνακα τιμών.

iv) Χρησιμοποιώντας τον πίνακα τιμών, οι μαθητές αναμένεται να βρουν, από τη γενική μορφή της παραβολής: $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$, $\alpha,\beta,\gamma \in R$, θα βρουν: $\begin{cases} \alpha=-0,05 \\ \beta=2 \\ \gamma=1,25 \end{cases}$.

v) Οι μαθητές λύνοντας την αντίστοιχη δευτεροβάθμια εξίσωση: $0=-0,05x^2+2x+1,25$, θα βρουν την απάντηση στο ερώτημα.

4.4 Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο αυτή;

Στη παράγραφο αυτή θα μάθουμε να:

1) Επιλύουμε ανισώσεις 2^{ου} βαθμού αλγεβρικά ή/και γραφικά **(ΠΜΑ: Αλ.Σχ,10.8)**

2) Αξιοποιούμε ανισώσεις 2^{ου} βαθμού στην επίλυση προβλημάτων **(ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.9)**

3) Κατασκευάζουμε δικά μας προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις ή/και ανισώσεις δευτέρου βαθμού **(ΠΜΑ: Αλ.Σχ.10.10)**

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας

Τα ερωτήματα i) και ii) καλύπτουν το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.8, ενώ το ερώτημα i) καλύπτει τα ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.9 και το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.10.

i) Με τη βοήθεια του Καθηγητή, οι μαθητές πρέπει να μεταγλωττίσουν το πρόβλημα σε γλώσσα Μαθηματικών. Αναμένουμε αφού πρώτα αναφερθούν στη γενική μορφή μιας παραβολής $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$, χρησιμοποιώντας τα τρία σημεία A, B, C να βρουν τη συνάρτηση: $h(t)=-16t^2+784$, επιλύοντας το αντίστοιχο σύστημα.

ii) Οι μαθητές θα πρέπει να θεωρήσουν τις αντίστοιχες -οριζόντιες- ευθείες που περιγράφουν τα ύψη 720 και 384 μέτρων, οπότε γραφικά, οι τετμημένες των σημείων τομής με την παραβολική τροχιά, θα δώσουν το ζητούμενο χρονικό διάστημα: $t_1=2$ και $t_2=5$ δευτερόλεπτα.

iii) Οι μαθητές, αφού πρώτα οδηγηθούν στη συνθήκη: $-16t^2+112t+29\geq 200$, θα πρέπει να δουν αλγεβρικά πως οι τιμές που τη μηδενίζουν είναι οι 2.25 και 4,75 και στη συνέχεια με δοκιμές τιμών μέσα ή έξω από το διάστημα [2,25, 4,75], να ελέγξουν το πρόσημο της συνθήκης, επιβεβαιώνοντας τη δοσμένη γραφική παράσταση.

Θέμα κριτικής σκέψης

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+2\alpha x+16$ και $g(x)=\sqrt{f(x)}$, όπου α πραγματικός αριθμός.

Α) Να βρείτε το πρόσημο της διακρίνουσας της συνάρτησης f για τις διάφορες τιμές του α

Β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$

Γ) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων που προκύπτουν από την f για $\alpha=-4$ και $\alpha=4$. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών τους σημείων

Δ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g για $\alpha=-4$ και να βρείτε γραφικά τις συντεταγμένες των σημείων που η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g

Ε) Να επαναλάβετε το ερώτημα Δ) για $\alpha=4$

ΣΤ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g για $\alpha=-4$ και $\alpha=4$ να βρείτε γραφικά τις συντεταγμένες των κοινών τους σημείων και να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα και αλγεβρικά

Λύση

Α) $\Delta=4\left(\alpha^2-16\right)$, οπότε $\Delta>0$ όταν $\alpha<-4$ ή $\alpha>4$, $\Delta=0$ όταν $\alpha=\pm4$, $\Delta<0$ όταν $-4<\alpha<4$

Β) Πρέπει και αρκεί $f(x)\geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Αυτό συμβαίνει όταν $\Delta\leq 0$ δηλαδή $-4\leq\alpha\leq 4$

Γ) Για $\alpha=-4$, $f_1(x)=(x-4)^2$ και για $f_2(x)=(x+4)^2$ οπότε αλγεβρικά τα σημεία τομής θα έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $(x-4)^2=(x+4)^2$ δηλαδή $x=0$. Άρα το σημείο τομής είναι το $(0,16)$

Δ) Για $\alpha=-4$, $g(x)=|x-4|$, οπότε $(x-4)^2<|x-4|$ … $3<x<4$ ή $4<x<5$

Ε) Όμοια … $-5<x<-4$ ή $-4<x<-3$

ΣΤ) Για $\alpha=-4$, $g(x)=|x-4|$ και για $\alpha=4$, $g(x)=|x+4|$, οπότε $|x-4|=|x+4|$ … $x=0$. Άρα το κοινό σημείο είναι το $(0,4)$

Κεφάλαιο 5ο

ΣΥΝΟΛΑ

5.1 Η έννοια του συνόλου

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο αυτή;

Στην παράγραφο αυτή θα μάθουμε να:

1) Αναγνωρίζουμε αν μια ιδιότητα ορίζει ένα σύνολο **(ΠΜΑ: Αλ.Σν.10.1)**

2) Αναπαριστάνουμε τα σύνολα με διάφορους τρόπους (αναγραφή, περιγραφή, διαγράμματα Venn) **(ΠΜΑ: Αλ.Σν.10.2)**

3) Εξετάζουμε αν ένα αντικείμενο ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο και να δηλώνουμε τη σχέση συμβολικά. **(ΠΜΑ: Αλ.Σν.10.3)**

4) Αναγνωρίζουν και δηλώνουν σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων με χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων και λεκτικά με κατάλληλη χρήση των συνδέσμων «ή» και «και» **(ΠΜΑ: Αλ.Σν.10.4)**

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ.132)

Τα ερωτήματα 1), 2) καλύπτουν το ΠΜΑ Αλ.Σν.10.1, τα ερωτήματα 3), 5) καλύπτουν το ΠΜΑ Αλ.Σν.10.2, ενώ τα ερωτήματα 4) και 6) καλύπτουν το ΠΜΑ Αλ.Σν.10.3.

Αρχικά έχουμε τα ακόλουθα σύνολα:

<u>Καλλιτεχνική Ομάδα</u>: $\text{ΚΟ} = \{\text{Ζ, Φ, Κ, Θ}\}$

<u>Ομάδα Εικαστικών</u>: $\text{ΟΕ} = \{\text{Ζ, Φ}\}$

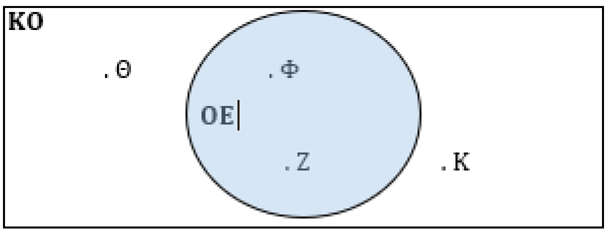
1) Όχι, καθώς δεν είναι ξεκάθαρο ποια τέχνη τους αρέσει συγκεκριμένα.

2) Οι πληροφορίες Π_1 και Π_2.

3) Η ομάδα των εικαστικών είναι υποσύνολο της ομάδας των καλλιτεχνικών.

4) Ναι οι μαθητές «Βασίλης» και «Ηρώ».

5) $\text{ΟΕ} = \{\text{Ζ, Φ}\}$ **ή** Ομάδα Εικαστικών: περιλαμβάνει τη Ζωγραφική και τη Φωτογραφία **ή**



6) Η μαθήτρια «Μαργαρίτα» δε φαίνεται να έχει καμία σχέση με την ομάδα των εικαστικών, άρα δεν ανήκει σε αυτή την ομάδα/σύνολο.

5.2 Πράξεις συνόλων

Τι καινούργιο υπάρχει στη παράγραφο αυτή;

Στην παράγραφο αυτή θα μάθουμε να:

Αναγνωρίζουμε και να δηλώνουμε σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων, με χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων, καθώς και λεκτικά με κατάλληλη χρήση των συνδέσμων «ή» και «και». **(ΠΜΑ: Αλ.Σν.10.4)**

Ανάλυση εισαγωγικής δραστηριότητας (σελ.136)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σν.10.4

1.

- Όλα τα τετράγωνα είναι ρόμβοι, ενώ όλοι οι ρόμβοι δεν είναι τετράγωνα.
- Ένας ρόμβος που είναι και ορθογώνιο είναι τελικά τετράγωνο. Αντίστροφα, κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος και ορθογώνιο.
- Όλοι οι ρόμβοι, τα ορθογώνια και τα τετράγωνα είναι παραλληλόγραμμα, ενώ όλα τα παραλληλόγραμμα δεν είναι ρόμβοι, ορθογώνια και τετράγωνα.

2. **i)** Και τις δύο τελετές: $A \cap B$

ii) Μία τουλάχιστον τελετή: $A \cup B$

iii) Την τελετή έναρξης και όχι την τελετή λήξης: $A - B$

Ανάλυση δραστηριότητας (σελ.140)

Το σύνολο της δραστηριότητας καλύπτει το ΠΜΑ Αλ.Σχ.10.4

1η)

Α) **1)** $A \cup B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ $(= B \cup A)$

2) $(A \cup B) \cup \Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$ $(= A \cup (B \cup \Gamma))$

3) $A \cup \varnothing = A$, προφανές

4) $A \cup A = A$, προφανές

Β) $\Delta = \{\alpha, \beta\}$, άρα $A \cup \Delta = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ $(= A)$

2η)

Α) **1)** $A \cap B = \{\gamma\}$ $(= B \cap A)$

2) $(A \cap B) \cap \Gamma = \{\gamma\}$ $(= A \cap (B \cap \Gamma))$

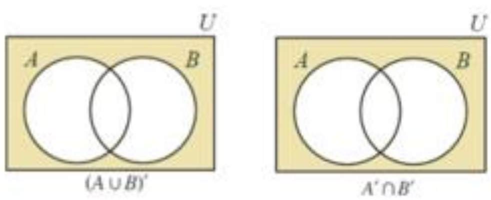
3) $A \cap \varnothing = \varnothing$, προφανές

4) $A \cap A = A$, προφανές

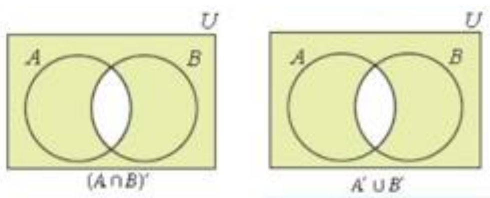
Β) $\Delta = \{\alpha, \beta\}$, άρα $A \cap \Delta = \{\alpha, \beta\}$ $(= \Delta)$

3η)

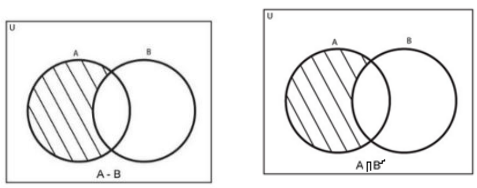
(1)



(2)



Γ)



Θέμα Κριτικής Σκέψης

Ο Δείκτης Ανθρώπινης Ανάπτυξης (ΔΑΑ), (μτφ. στα αγγλικά: Human Development Index, HDI), είναι ο στατιστικός δείκτης που χρησιμοποιείται για να κατατάσσει μια χώρα ως: «υποανάπτυκτη», «αναπτυσσόμενη» ή «αναπτυγμένη», με βάση την ανθρώπινη ανάπτυξη, η οποία σχετίζεται με: το προσδόκιμο ζωής, το επίπεδο μόρφωσης και το κατά κεφαλήν εισόδημα των κατοίκων της.

Ας υποθέσουμε ότι με:

Ζ, παριστάνουμε την ομάδα των χωρών με προσδόκιμο ζωής των κατοίκων τους μεγαλύτερο των 75 ετών,

Φ, παριστάνουμε την ομάδα των χωρών όπου τα χρόνια φοίτησης στο σχολείο είναι τουλάχιστον 9,

Ε, παριστάνουμε την ομάδα των χωρών, όπου το κατά κεφαλήν εισόδημα των κατοίκων τους είναι το λιγότερο 17000 ευρώ, ανά κάτοικο.

Το 2020, από τις 100 χώρες με το υψηλότερο ΔΑΑ,

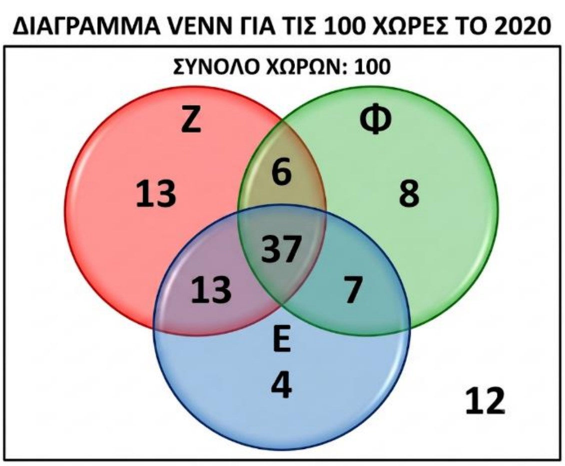
- 69 ήταν στην ομάδα Ζ,
- 58 ήταν στην ομάδα Φ,
- 61 ήταν στην ομάδα Ε,
- 50 ήταν στην ομάδα Ζ και στην ομάδα Ε,
- 44 ήταν στην ομάδα Φ και στην ομάδα Ε,
- 43 ήταν στην ομάδα Ζ και στην ομάδα Φ,
- 37 ήταν στη ομάδα Ζ, στην ομάδα Φ και στην ομάδα Ε,

Να διερευνήσετε τα ακόλουθα ερωτήματα:

1. Πως μπορούμε να παρουσιάσουμε τα παραπάνω δεδομένα, μέσω διαγράμματος;
2. Πως μπορούμε να βρούμε πόσες από τις 100 χώρες δε βρίσκονται σε καμία από τις Ζ, Φ, Ε;
3. Πόσες χώρες ήταν:
   i) Μόνο στην ομάδα Φ;
   ii) Στην ομάδα Ζ ή στην ομάδα Ε, αλλά όχι στη ομάδα Φ;
   iii) Στην ομάδα Φ και στην ομάδα Ε, αλλά όχι στην ομάδα Ζ;

Λύση

1. Για το πρώτο ερώτημα έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα Venn όπου μέσα σε κάθε χωρίο είναι σημειωμένοι οι πληθικοί αριθμοί των αντιστοίχων συνόλων, σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος.



2. Οι χώρες που αναφέρονται στο ερώτημα αυτό, στο διάγραμμα Venn απεικονίζονται με το λευκό χωρίο και έχουν πλήθος:

$$100-\left(N(Z)+N(\Phi)+N(E)-N(Z\cap\Phi)-N(\Phi\cap E)-N(E\cap Z)+N(Z\cap\Phi\cap E)\right)=$$

$$100-(69+58+61-43-50-44+37)=100-88=12$$

3.

i) Μόνο στην ομάδα Φ είναι: $58-(6+37+7)=58-50=8$.

Απάντηση: 8 χώρες

ii) Στην ομάδα Ζ ή στην ομάδα Ε, αλλά όχι στην ομάδα Φ είναι: $13+4+13=30$.

Απάντηση: 30 χώρες

iii) Στην ομάδα Φ και στην ομάδα Ε, αλλά όχι στην ομάδα Ζ είναι: $(37+7)-37=7$.

Απάντηση: 7 χώρες

ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Η προετοιμασία ενός σχεδίου μαθήματος στην Α΄ Λυκείου απαιτεί διάφορες βασικές εργασίες που συμβάλλουν στην ποιότητα και αποτελεσματικότητα του διδακτικού προγράμματος. Ακολούθως παραθέτουμε μερικές βασικές εργασίες που πρέπει να πραγματοποιηθούν:

1. **Καθορισμός Στόχων Μαθήματος:**
   - Καθορισμός των βασικών μαθησιακών στόχων και επιδιώξεων του μαθήματος.
   - Διαμόρφωση συγκεκριμένων, μετρήσιμων και εφικτών στόχων για τους μαθητές.
2. **Ανάλυση Προγράμματος Σπουδών:**
   - Εξέταση των περιεχομένων του προγράμματος σπουδών για το συγκεκριμένο επίπεδο της Α λυκείου.
   - Αναγνώριση των θεμάτων που πρέπει να καλυφθούν.
3. **Επιλογή Διδακτικών Υλικών:**
   - Εύρεση κατάλληλων διδακτικών βοηθημάτων, βιβλίων, ηλεκτρονικών πηγών και άλλων υλικών.
   - Εξέταση της εγκυρότητας και ποιότητας των υλικών.
4. **Καθορισμός Διδακτικών Μεθόδων:**
   - Επιλογή των κατάλληλων διδακτικών μεθόδων που θα χρησιμοποιηθούν για την ενίσχυση της κατανόησης και εφαρμογής των μαθηματικών αρχών.
   - Προετοιμασία διαδραστικών δραστηριοτήτων και προβολών.
5. **Κατάρτιση Σχεδίου Μαθήματος:**
   - Δομή του σχεδίου και των διαφανειών/παρουσιάσεων.
   - Χρήση ποικίλων μεθόδων για τη διατήρηση της προσοχής των μαθητών.
6. **Κατασκευή Αξιολογήσεων:**
   - Δημιουργία ερωτήσεων, ασκήσεων και άλλων μέσων αξιολόγησης.
   - Καθορισμός κριτηρίων αξιολόγησης.
7. **Συνεχής Αξιολόγηση και Προσαρμογή:**
   - Συνεχής παρακολούθηση της απόδοσης των μαθητών και προσαρμογή του σχεδίου ανάλογα με τις ανάγκες της τάξης.

Αυτές οι εργασίες συμβάλλουν στη σταθερή βάση για τη δημιουργία ενός σχεδίου μαθήματος που θα είναι ενδιαφέρον, εκπαιδευτικό και αποδοτικό.

Ενδεικτικό σχέδιο μαθήματος

Οι διάφορες μορφές της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\ \ \alpha\neq 0$

ΜΕΡΟΣ Α

Α.1 Χρησιμοποιήστε το λογισμικό Geogebra για να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

1. $y=(x-1)(x-3)$

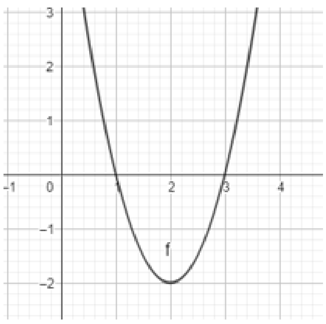
2. $y=2(x-1)(x-3)$

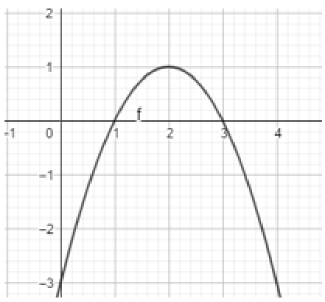
3. $y=-(x-1)(x-3)$

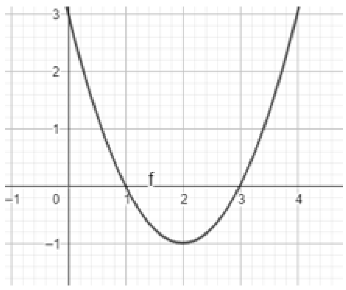
4. $y=-3(x-1)(x-3)$

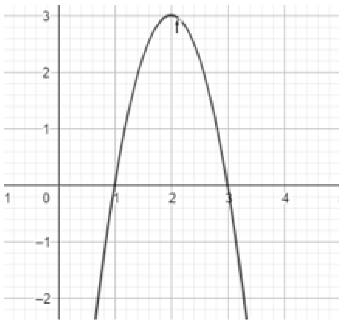
5. $y=-\frac{1}{2}(x-1)(x-3)$

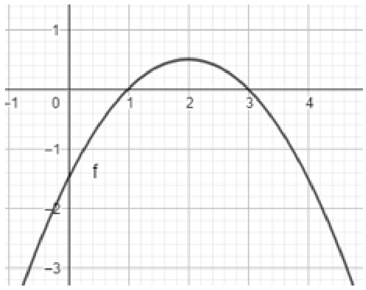
Α.2 Αν δυσκολευτήκατε στο ερώτημα Α.1, με τη χρήση του λογισμικού, να αντιστοιχίσετε τις παραπάνω συναρτήσεις με τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:


[ ]


[ ]


[ ]


[ ]


[ ]

Α.3 Ποια είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων του ερωτήματος Α.1, με τον άξονα x'x, αντίστοιχα;

1. …

2. …

3. …

4. …

5. …

Α.4 Ποια η γεωμετρική σημασία του α στη γενική μορφή $y=\alpha(x-1)(x-3)$;

……

A.5 Χρησιμοποιήστε το λογισμικό Geogebra για να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

1. $y = 2(x-1)(x-4)$

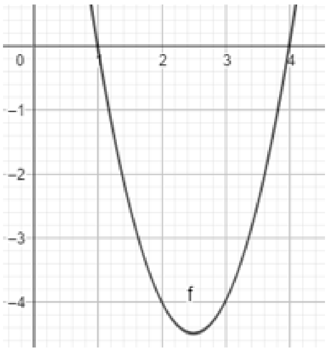
2. $y = 2(x-3)(x-5)$

3. $y = 2(x+1)(x-2)$

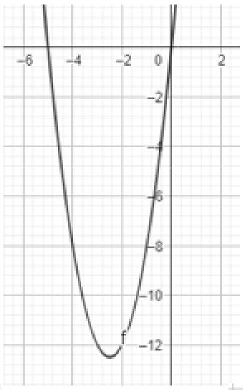
4. $y = 2x(x+5)$

5. $y = 2(x+2)(x+4)$

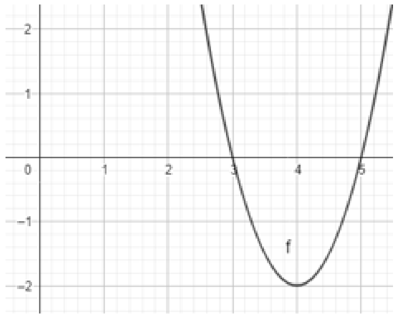
A.6 Αν δυσκολευτήκατε στο ερώτημα Α.5, με τη χρήση του λογισμικού, να αντιστοιχίσετε τις παραπάνω συναρτήσεις με τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:



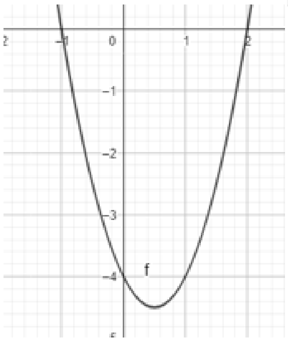
[ ]



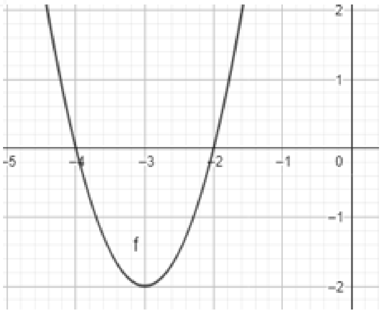
[ ]



[ ]



[ ]



[ ]

A.7 Ποια είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων του ερωτήματος Α.5, με τον άξονα x'x, αντίστοιχα;

1. ...

2. ...

3. ...

4. ...

5. ...

A.8 Ποια η γεωμετρική σημασία των α, β στη γενική μορφή $y = 2(x-\alpha)(x-\beta)$;

....

....

A.9 Χρησιμοποιήστε το λογισμικό Geogebra για να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

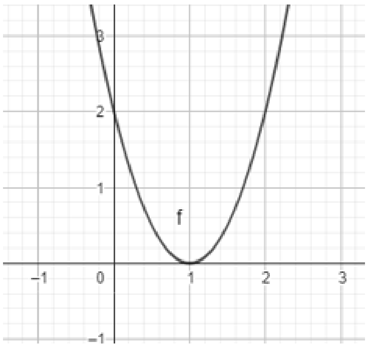
1. $y = 2(x-1)^2$

2. $y = 2(x-3)^2$

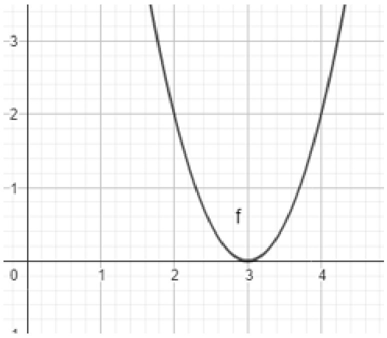
3. $y = 2(x+2)^2$

4. $y = 2x^2$

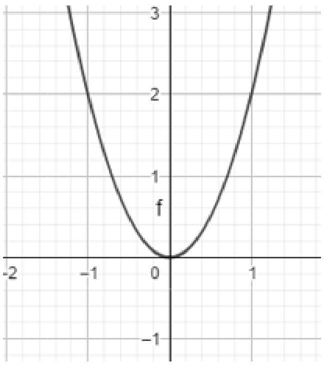
A.10 Αν δυσκολευτήκατε στο ερώτημα Α.9, με τη χρήση του λογισμικού, να αντιστοιχίσετε τις παραπάνω συναρτήσεις με τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:



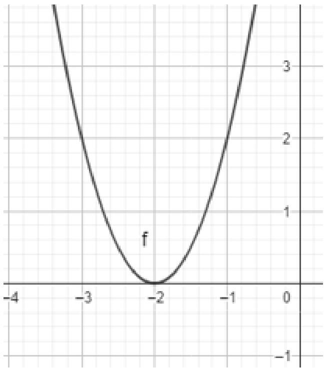
[ ]



[ ]



[ ]



[ ]

A.11 Ποια είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων του ερωτήματος Α.9, με τον άξονα x'x, αντίστοιχα;

1. ...

2. ...

3. ...

4. ...

A.12 Ποια η γεωμετρική σημασία του α στη γενική μορφή $y = 2(x-\alpha)^2$;

....

....

A.13 Συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- Αν η συνάρτηση έχει τη μορφή $y=\alpha(x-\beta)(x-\gamma)$, τότε ……………………………………… τον άξονα x'x στα σημεία με τετμημένες ……………………………………………………………………………………………………
- Αν η συνάρτηση έχει τη μορφή $y=\alpha(x-\beta)^2$, τότε ……………………………………………… τον άξονα x'x στο σημείο με τετμημένη ………………………………………………………………………………………………………

ΜΕΡΟΣ Β

Β.1 Χρησιμοποιήστε το λογισμικό Geogebra για να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

1. $y=(x-3)^2+2$

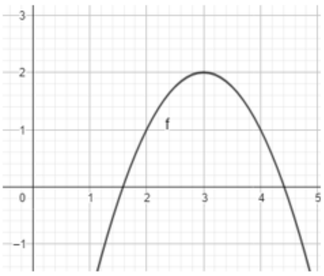
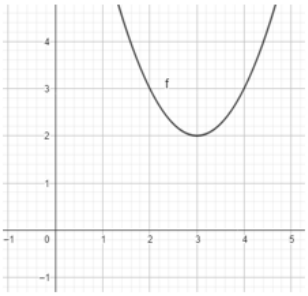
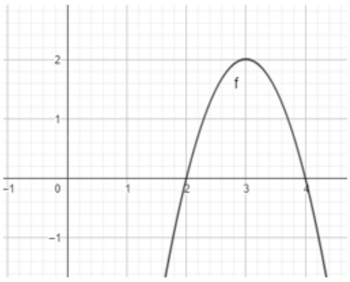
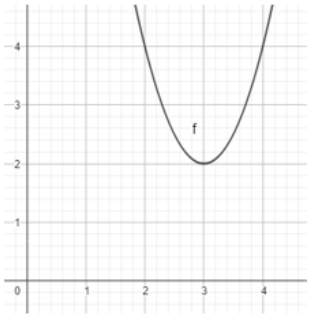
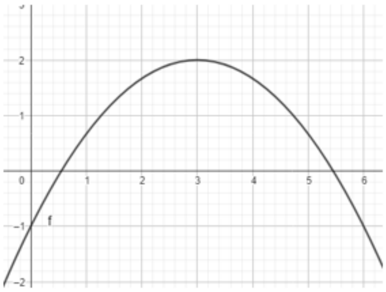
2. $y=2(x-3)^2+2$

3. $y=-2(x-3)^2+2$

4. $y=-(x-3)^2+2$

5. $y=-\frac{1}{3}(x-3)^2+2$

Β.2 Αν δυσκολευτήκατε στο ερώτημα Β.1, με τη χρήση του λογισμικού, να αντιστοιχίσετε τις παραπάνω συναρτήσεις με τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:


[ ]

[ ]

[ ]

[ ]

[ ]

Β.3

Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων του ερωτήματος Β.1;

1. …

2. …

3. …

4. …

5. …

B.4 Ποια η γεωμετρική σημασία του α στη γενική μορφή $y=\alpha(x-3)^2+2$;

………

………

B.5 Χρησιμοποιήστε το λογισμικό Geogebra για να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

1. $y=2(x-1)^2+3$

2. $y=2(x-2)^2+4$

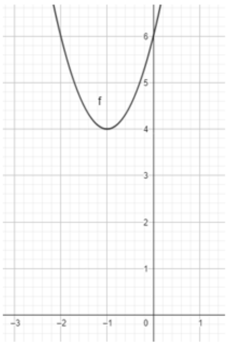
3. $y=2(x-3)^2+1$

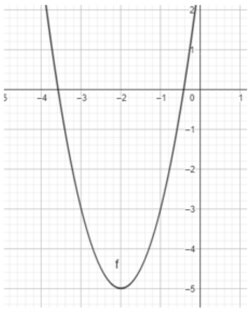
4. $y=2(x+1)^2+4$

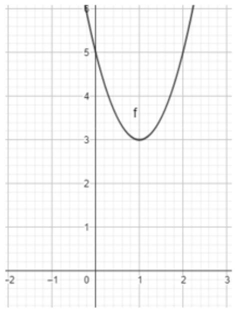
5. $y=2(x+2)^2-5$

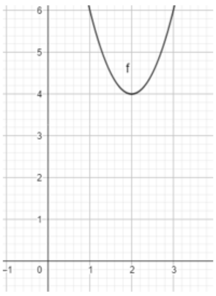
6. $y=2(x+3)^2-2$

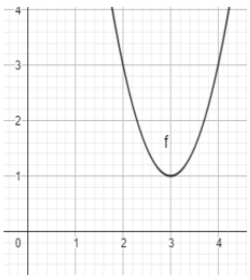
B.6 Αν δυσκολευτήκατε στο ερώτημα B.5, με τη χρήση του λογισμικού, να αντιστοιχίσετε τις παραπάνω συναρτήσεις με τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις:

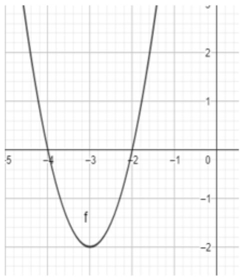

[ ]


[ ]


[ ]


[ ]


[ ]


[ ]

B.7 Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων του ερωτήματος B.5;

1. …
2. …
3. …
4. …
5. …
6. …

B.8 Ποια η γεωμετρική σημασία των $\alpha,\ \beta$ στη γενική μορφή $y=2(x-\alpha)^2+\beta$;

………

………

B.9 Συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- Αν η συνάρτηση έχει τη μορφή $y=\alpha(x-\beta)^2+\gamma$, τότε οι συντεταγμένες της κορυφής είναι ………

- Αν η συνάρτηση έχει τη μορφή $y=\alpha(x-\beta)^2+\gamma$, τότε η γραφική της παράσταση είναι μια …….. της γραφικής παράστασης της $y=\alpha x^2$ κατά ……. μονάδες ………………………………… και κατά ………. μονάδες προς τα ………

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Α. Για να προσεγγίσετε το θέμα των **δραστηριοτήτων** στα βιβλία μαθηματικών του λυκείου, μπορείτε να ανατρέξετε σε σχετική ελληνική και ξενόγλωσση βιβλιογραφία. Εδώ παραθέτουμε μερικούς πιθανούς τίτλους που μπορεί να σας ενδιαφέρουν:

Ελληνική Βιβλιογραφία:

1. Βασάκος Θ.: Η έννοια της συνάρτησης στους μαθητές του Λυκείου και ενέργειες κατανόησης. Εμπόδια που σχετίζονται με τον ορισμό της συνάρτησης, (Γαγάτσης Αθ. Διδακτική των Μαθηματικών. Θεωρία-Έρευνα» εκδόσεις Art of text A.E, σελ 239-258, Θεσσαλονίκη 1995)
2. Γαγάτσης Α.- Ηλία Ι.- Ανδρέου Σ.: Αναπαραστάσεις και μάθηση των Μαθηματικών Συναρτήσεις και Αριθμητική Γραμμή, περιοδικό Ευκλείδης γ τεύχος 59, 2003.
3. Καλαβάσης Φ – Μεϊμάρης Μ: Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών. Προτάσεις, Αθήνα 1992.
4. Καλδρυμίδου Μ. - Οικονόμου Α.: Πρόταση Αναλυτικού Προγράμματος Συναρτήσεων. Οι βασικοί άξονες. Σχέδιο αναλυτικού προγράμματος για τα Μαθηματικά. Θεσσαλονίκη 1993.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία:

1. Jo Boaler, "Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching," Wiley, 2016.
2. Dan Meyer, "Teach Like a PIRATE: Increase Student Engagement, Boost Your Creativity, and Transform Your Life as an Educator," Dave Burgess Consulting, 2012.
3. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), "Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All," NCTM, 2014.
4. Sfard A: Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification. The case of function in “The concept of Function:aspects of epistemology and Pedagogy” by Dubinsky Ed. and Harrel G.(eds). Mathematical Association of America U.S vol 25, pp. 25-58, 1992.
5. Sierpinska A: On understanding the Notion of function in “The concept of Function:aspects of epistemology and Pedagogy” by Dubinsky Ed. and Harrel G.(eds), M.A.A vol 25, pp.59- 84, 1992.
6. Vinner S: Consept definition, consept image and the notion of function, Journal for research in Mathematics education, 14 pp. 239-305, 1983

Β. Για να προσεγγίσετε το θέμα των **διαθεματικής προσέγγισης και μοντελοποίησης** στα βιβλία μαθηματικών του λυκείου, μπορείτε να ανατρέξετε σε σχετική ελληνική και ξενόγλωσση βιβλιογραφία. Εδώ παραθέτουμε μερικούς πιθανούς τίτλους που μπορεί να σας ενδιαφέρουν:

Ελληνική Βιβλιογραφία:

1. Βαρνάβα-Σκούρα Τ., “Διαθεματική Προσέγγιση στη Διδασκαλία”, Παιδαγωγική και Ψυχολογική Εγκυκλοπαίδεια, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα, 1991.
2. Κλαουδάτος Ν., “Η Μοντελοποίηση στη Διδακτική Πράξη”, Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1992.
3. Ματσαγγούρας Η., “Η Διαθεματικότητα στη Σχολική Γνώση. Εννοιοκεντρική Αναπλαισίωση και Σχέδια Εργασίας”, Εκδόσεις Γρηγόρης, Αθήνα, 2002.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία:

1. Doig, Brian, et al. *Interdisciplinary Mathematics Education: A State of the Art.* Information Age Publishing, 2021.
2. Eisenberg, Theodore, and Elizabeth Stump. *Mathematics and Interdisciplinary Research.* Springer, 2020.
3. Hannon, Jane. *Interdisciplinary Teaching and Learning in Higher Education.* Sage Publications, 2019.
4. Moss, David M. *Interdisciplinary Education: A Guide to Theory and Practice.* Jossey-Bass, 2017.

Γ. Για να προσεγγίσετε το θέμα της **ύλης των μαθηματικών** στα βιβλία της πρώτης τάξης του λυκείου, μπορείτε να ανατρέξετε σε σχετική ελληνική και ξενόγλωσση βιβλιογραφία. Εδώ παραθέτουμε μερικούς πιθανούς τίτλους που μπορεί να σας ενδιαφέρουν:

Ελληνική Βιβλιογραφία:

1. Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας , "Αξιολόγηση των μαθητών της Α' Λυκείου στα Μαθηματικά", Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, Αθήνα, 1998.
2. Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β. κ.α.: "Άλγεβρα Α' Γενικού Λυκείου", Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα, 1998.
3. Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β. κ.α.: "Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α' Γενικού Λυκείου", Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα, 2011.
4. Βαρουχάκης Ν., Αδαμόπουλος Λ. κ.α.: "Άλγεβρα Α' Λυκείου", Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα, 1986.
5. Περιοδικό «Ευκλείδης Β΄» Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία
6. Φυσική Γ΄Λυκείου (index), Μ. Μαραγκάκης, Χ. Νικολάου, Χ. Κυργιάκης, Εκδόσεις Λιβάνη

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία:

1. Haese Mathematics: Mathematics for the International Student: Mathematics Analysis and Approaches HL/SL (Core) (3rd ed.). Haese Mathematics Publishers, 2019.
2. Haese Mathematics: Mathematics for the International Student: Mathematics Analysis and Approaches HL (3rd ed.). Haese Mathematics Publishers, 2019.
3. Haese Mathematics: Mathematics for the International Student: Mathematics Analysis and Approaches SL (3rd ed.). Haese Mathematics Publishers, 2019.
4. Cambridge University Press: Mathematics Analysis and Approaches for the IB Diploma (Standard Level). Cambridge University Press, 2018.
5. Pearson: IB Mathematics: Analysis and Approaches, Higher Level, for the IB Diploma. Pearson Education, 2018.
6. Oxford University Press: IB Mathematics: analysis and approaches, Standard Level, for the IB Diploma. Oxford University Press, 2019.
7. Besser in Mathematik, Gymnasium 7,8,9,10 Klasse. Alexander Spahn. Cornelsen SCRIPTON.
8. Hahn, D., & Dzewas, K. Mathematik 7,8,9. Westermann.
9. Malle, G., Woschitz, H., Koth, G., & Salzger, E. Mathematik verstehen. ōbv.
10. LS 7,8,9, Nordrhein-Westfalen. LAMBACHER SCHWEIZER.

11. MATHS 1de, 2de. lelivrescolaire.fr.
12. Maths 1reES.L. Bordas.
13. Maths repères 1reS. Hachette.
14. Mathematiques 2de. Hyperbole, Nathan.
15. Matematik 9, Ders Kitabi. Erhan Karakuyu, & Oktay Bağci.
16. Matematik 10, Ders Kitabi. Turgut Erel.
17. Matematik 1, Ders Kitabi. Abdullah Aydm Üllü, & Harun Er.

Δ. Για να προσεγγίσετε θέματα **ιστορίας μαθηματικών** στα βιβλία της πρώτης τάξης του λυκείου, μπορείτε να ανατρέξετε σε σχετική ελληνική και ξενόγλωσση βιβλιογραφία. Εδώ παραθέτουμε μερικούς πιθανούς τίτλους που μπορεί να σας ενδιαφέρουν:

Ελληνική Βιβλιογραφία:

1. Bunt, Lukas N.H., Phillip S. Jones, and Jack D. Bedient. Οι Ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών.
2. Ευαγγέλου Σπανδάγου, Τα Μαθηματικά των Αρχαίων Ελλήνων, Εκδόσεις "ΑΙΘΡΑ".
3. Bell, E. T. Οι μαθηματικοί. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία:

4. Boyer, C. B., and Merzbach, U. C. A History of Mathematics. John Wiley & Sons, 2011.
5. Burton, D. M. The History of Mathematics: An Introduction. McGraw-Hill Education, 2011.
6. Katz, V. J., editor. The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook. Princeton University Press, 2009.
7. Kline, M. Mathematics: The Loss of Certainty. Oxford University Press, 1990.
8. Maor, E. To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinite. Princeton University Press, 1991.
9. Kline, Morris. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press, 1972.
10. Peterson, I. The Mathematical Tourist: Snapshots of Modern Mathematics. Macmillan, 1995.
11. Van Brummelen, G. The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry. Princeton University Press, 2010.

Αυτοί οι τίτλοι αντιπροσωπεύουν μια μικρή επιλογή και μπορείτε να επεκτείνετε την έρευνά σας βασιζόμενοι στα ενδιαφέροντα και τις ανάγκες σας. Επίσης, μπορείτε να αναζητήσετε περαιτέρω εργασίες και άρθρα σε επιστημονικά περιοδικά και ιστοσελίδες εκπαιδευτικών οργανισμών.