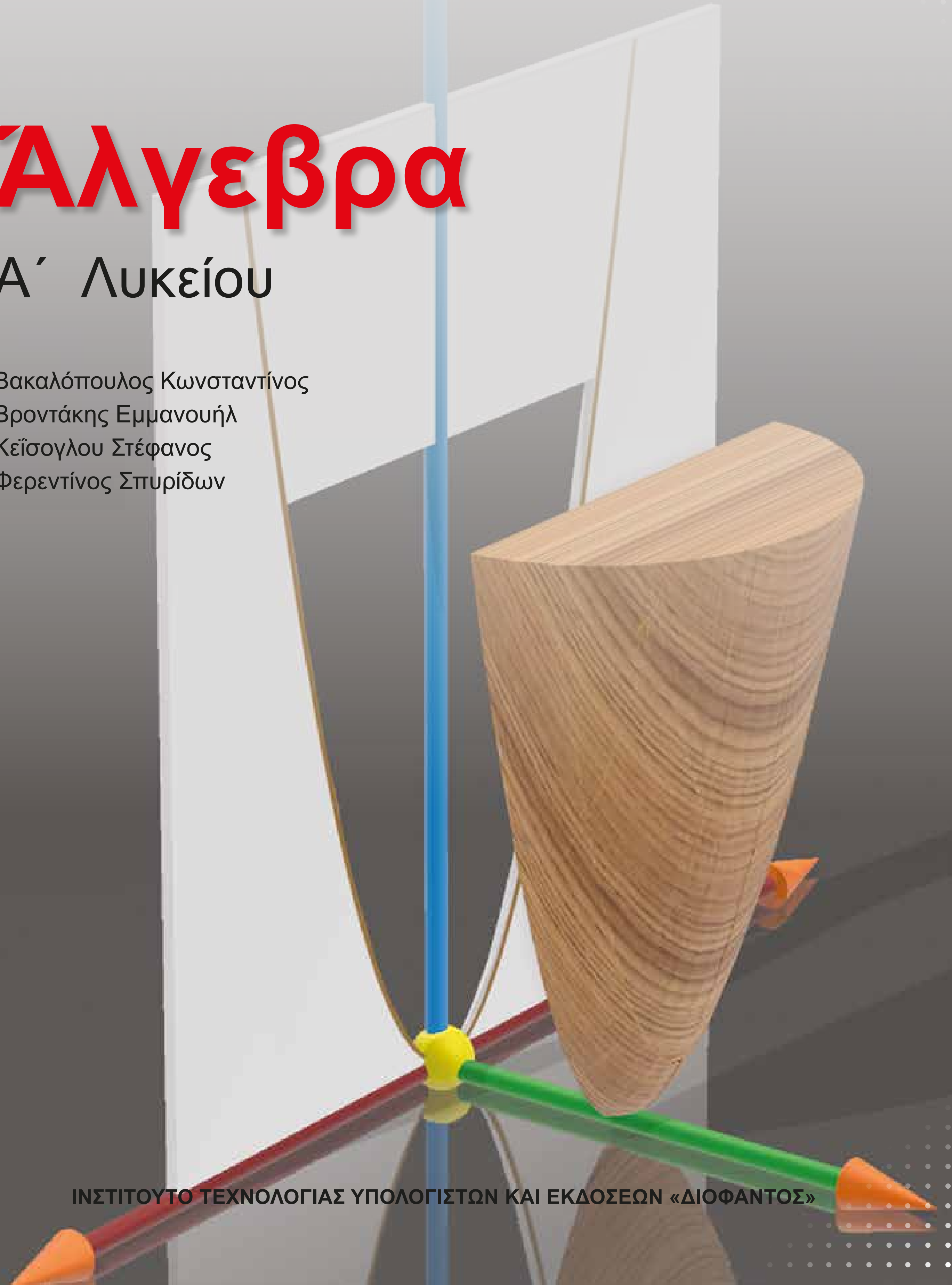
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Άλγεβρα

Α΄ Λυκείου

Βακαλόπουλος Κωνσταντίνος
Βροντάκης Εμμανουήλ
Κεΐσογλου Στέφανος
Φερεντίνος Σπυρίδων



ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Άλγεβρα

Α΄ Λυκείου

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης

Συντονίστρια / Αξιολογήτρια	**Μάλη Αγγελική** Εν ενεργεία μέλος Διδακτικού Ερευνητικού Προσωπικού Πανεπιστημίου
Αξιολογητής	**Λαμπίρης Γεώργιος** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Αξιολογήτρια	**Μπαλωμένου Αθανασία** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Τεχνικός Εμπειρογνώμονας	**Μπερδούσης Ιωάννης** Πτυχιούχος Πληροφορικής
Επικουρικός Εμπειρογνώμονας	**Θεοδωρίσκου Αλεξία** Πτυχιούχος Τεχνολογίας Γραφικών Τεχνών
Υπεύθυνη του μαθήματος/γνωστικού αντικειμένου στο πλαίσιο της Πράξης	**Ειρήνη Γεωργάκη**, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, μέλος της Επιστημονικής Ομάδας Έργου (ΕΟΕ) της Πράξης

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Σπυρίδων Δουκάκης

Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης

Πολυξένη Μπίλλα

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Προϊσταμένη Τμήματος Β΄ Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού

Αναπληρώτρια Υπεύθυνη Πράξης

Άννα-Αικατερίνη Λυκούρη

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»

και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Βακαλόπουλος Κωνσταντίνος, Βροντάκης Εμμανουήλ,
Κεΐσογλου Στέφανος, Φερεντίνος Σπυρίδων

Άλγεβρα

Α΄ Λυκείου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Συγγραφική Ομάδα:
Βακαλόπουλος Κωνσταντίνος, Καθηγητής Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (MSc)
Βροντάκης Εμμανουήλ, Καθηγητής Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (PhD, MSc)

Επιστημονικοί Υπεύθυνοι:
Κεΐσογλου Στέφανος, τ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών (PhD)
Φερεντίνος Σπυρίδων, τ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών (PhD)

Εκπαιδευτική / Παιδαγωγική Ομάδα:
Βαρούχας Αλέξανδρος, Καθηγητής Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (MSc)
Λαγουδάκος Γεώργιος, Καθηγητής Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (MSc)
Μαυρομμάτης Άρης, Καθηγητής Μαθηματικών Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης (PhD, MSc)

Έκδοση: Εκδόσεις ΜΕΘΟΔΙΚΟ (www.methodiko.gr)

ΜΕΘΟΔΙΚΟ
Εκπαιδευτικός Οργανισμός

Επιμέλεια Ηλεκτρονικής Σελιδοποίησης & Εξωφύλλου: Καίτη Αλεξοπούλου
Σχεδιασμός εξωφύλλου: Άρης Μαυρομμάτης

Πηγές
7: Raphael, The School of Athens (1509–1511), λεπτομέρεια, Μουσείο Βατικανού, Wikimedia Commons, Public Domain - **32:** shutterstock.com - **43:** • Portrait of Johannes Bernoulli (1667–1748), Wikimedia Commons, Public Domain. • Portrait of Leonhard Euler (1707–1783), Wikimedia Commons, Public Domain. • Portrait of Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), Wikimedia Commons, Public Domain. • Portrait of Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), Wikimedia Commons, Public Domain. • Portrait of Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), Wikimedia Commons, Public Domain. **56:** Από το βιβλίο: Hahn/Dzewas, Mathematik 8, westermann, σελ. 21 **61:** shutterstock.com **66:** reddit.com **74:** Δημιουργία AI **75:** Δημιουργία GeoGebra **82:** Winged Victory of Samothrace (c. 190 BC), Hellenistic period. Source: Wikimedia Commons, Public Domain/σε συνδυασμό με GeoGebra **82:** Δημιουργία AI/GeoGebra **85:** Euclid, depicted by Justus van Ghent (c. 1474). Source: Wikimedia Commons, Public Domain. **93:** Rhind Mathematical Papyrus (c. 1650 BC), ancient Egyptian mathematics. Source: Wikimedia Commons, Public Domain. **101:** Adam Ries(e) (1492–1559). Source: Wikimedia Commons, Public Domain. **113:** www.wonderlandmodels.com **93:** • Δημιουργία AI: ChatGPT (σε συνδυασμό με GeoGebra) • Δημιουργία AI: ChatGPT **131:** • Georg Cantor (1845–1918). Source: Wikimedia Commons, Public Domain. • John Venn (1834–1923). Source: Wikimedia Commons, Public Domain.

Ταυτοτητα βιβλιου

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας έχει ως βασικό χαρακτηριστικό την ισόρροπη παράθεση του αυστηρού μαθηματικού περιεχόμενου από τη μία, και την ανάδειξη του κεντρικού ρόλου του μαθητή στη μαθησιακή διαδικασία από την άλλη.

Κυρίαρχη θέση στην εκπαιδευτική διαδικασία δεν έχει μόνο ο καθηγητής, αλλά και ο μαθητής, γιατί πεποίθηση των συγγραφέων είναι ότι η μάθηση προϋποθέτει την ενεργή συμμετοχή των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία. Στο συγκεκριμένο βιβλίο ο σχεδιασμός και η διαχείριση της διδακτικής πράξης πραγματοποιούνται με τρόπους που υποστηρίζουν τον μαθητή, ώστε να σκέφτεται ως μαθηματικός ερευνητής.

Το **πρόγραμμα σπουδών (ΠΣ)** καθορίζει με σαφήνεια ότι η ανάπτυξη του μαθηματικού περιεχομένου γίνεται με βάση την έννοια της εξελικτικής πορείας που καθορίζουν τα **Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)** μέσω των οποίων εξειδικεύονται οι γενικοί στόχοι μάθησης στο νέο ΠΣ.

Ένα από τα κυρίαρχα χαρακτηριστικά του βιβλίου είναι ότι η νέα γνώση δεν παρουσιάζεται από τον καθηγητή, αλλά ανακαλύπτεται από τον μαθητή μέσω της διαχείρισης-επεξεργασίας κατάλληλων μαθηματικών δραστηριοτήτων και έργων. Ο καθηγητής δημιουργεί το κατάλληλο υποστηρικτικό περιβάλλον (και με τη βοήθεια ψηφιακών ή χειραπτικών εργαλείων), ώστε ο ίδιος ο μαθητής μέσω ερευνητικής διαδικασίας να κατασκευάσει τη νέα γνώση, δηλαδή τα ΠΜΑ να προκύψουν μέσα από τη διαχείριση-επεξεργασία των μαθηματικών δραστηριοτήτων και έργων που υλοποιούν τους στόχους της κάθε διδακτικής ενότητας. Σε όλα σχεδόν τα κεφάλαια χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά της ύλης επιλύονται προβλήματα, κάτι που δίνει νόημα και αξία στο μάθημά μας.

Το παρόν βιβλίο περιέχει τα θεματικά πεδία «Αριθμός, Άλγεβρα» τα οποία συγκροτούνται από τις εξής πέντε θεματικές ενότητες (κεφάλαια):

– θεματικό πεδίο: αριθμός,
– θεματική ενότητα: πραγματικοί αριθμοί,
– θεματικό πεδίο: άλγεβρα,
– θεματικές ενότητες: συναρτήσεις - τριγωνομετρία, αλγεβρικές παραστάσεις, αλγεβρικές σχέσεις, σύνολα

Με βάση τα περιεχόμενα της κάθε θεματικής ενότητας, τα οποία περιέχονται στο Π.Σ. που αφορά την Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου, επελέγησαν στο κάθε ένα από τα κεφάλαια οι αντίστοιχες διδακτικές ενότητες (παράγραφοι), όπου στην κάθε μια από αυτές αναπτύσσονται τα αντίστοιχα για την κάθε παράγραφο ΠΜΑ.

Σε όλη την έκταση του βιβλίου υπάρχει πληθώρα ΨΜΑ (Ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων) που αποτελούν πολύτιμο εργαλείο στη μαθησιακή διαδικασία.

Κάθε κεφάλαιο ξεκινά με ένα **ιστορικό σημείωμα**, το οποίο αναφέρεται στο περιεχόμενο του. Στη συνέχεια, κάθε παράγραφος του κεφαλαίου παρουσιάζεται ως εξής:

- **Τι καινούργιο υπάρχει στην παράγραφο:** Εδώ γράφουμε ένα προς ένα τα ΠΜΑ όπως αυτά αναφέρονται στα ΠΣ.
- **Απαραίτητες γνώσεις:** Παραθέτουμε γνώσεις από το Γυμνάσιο ή τις προηγούμενες παραγράφους και την απαραίτητη ορολογία και τις προτάσεις επιγραμματικά, που χρειάζονται για την κατανόηση των όσων θα ακολουθήσουν.
- **Εισαγωγική δραστηριότητα:** Θέτουμε μία ελκυστική πραγματική (ρεαλιστική) κατάσταση ή ένα σύνθετο ερώτημα ή μία περιγραφή ή οτιδήποτε θα μπορούσε να αποτελέσει αφορμή για προβληματισμό και μαθηματική δραστηριότητα. Βασικός στόχος της εισαγωγικής αυτής δραστηριότητας είναι να προκύψει η επεξεργασία-διαχείριση των ΠΜΑ μέσω της ενεργής συμμετοχής των μαθητών.
- **Ας δούμε τι έχει προκύψει:** Συνοψίζουμε τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε από την ανάπτυξη της δραστηριότητας και παραθέτουμε τους ορισμούς και τα θεωρήματα που θεμελιώνουν τις έννοιες που αναφέρονται.
- **Ασκήσεις κατανόησης:** Επιλέγουμε, απλές ασκήσεις (παραδείγματα) και ερωτήματα για την εμπαίδωση των βασικών εννοιών.
- **Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω:** Παραθέτουμε λυμένες εφαρμογές στις οποίες υποδεικνύουμε μεθοδολογίες, τις οποίες θα μπορεί ο μαθητής να τις αξιοποιήσει στις ασκήσεις προς λύση.
- **Ασκήσεις – προβλήματα:** Προτείνουμε για λύση μία ποικιλία θεμάτων διαβαθμισμένης δυσκολίας
- **Θέματα κριτικής σκέψης:** Παραθέτουμε κάποια θέματα που απαιτούν ελάχιστες πράξεις, νοερούς υπολογισμούς, γρίφους, κανονικότητες και γενικά μη συμβατικά θέματα.
- Το κάθε κεφάλαιο κλείνει με την παράθεση σύντομης **ανακεφαλαίωσης** και **κριτηρίου αυτοαξιολόγησης**.

Περιεχομενα

Κεφάλαιο 1ο

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Λέξεις κλειδιά: *πραγματικοί αριθμοί, διαδοχικότητα, πυκνότητα, απόλυτη τιμή, νιοστή ρίζα.*

Ιστορικό σημείωμα

«Οι Πυθαγόρειοι είχαν την τάση να προσδίδουν στους αριθμούς ιδιότητες όχι μαθηματικές, όπως φιλία και τελειότητα. Οι διαλογισμοί των Πυθαγορείων αναφορικά με τους αριθμούς είχαν μια πνευματικότητα και ήταν σύμφωνοι με τη μυστικιστική σημασία του αριθμού. Πίστευαν πως ο αριθμός είναι η ουσία των όντων και ως τέτοιος έχει μαγική δύναμη... Σε ένα πλήθος φυσικών και ηθικών περιοχών οι Πυθαγόρειοιέβλεπαν τον αριθμό ως θεμελιώδες στοιχείο τους. Για παράδειγμα, τους περιττούς αριθμούς τους ονόμαζαν αρσενικούς και τους άρτιους θηλυκούς. Ο αριθμός 5, που είναι άθροισμα του πρώτου περιττού αριθμού και του πρώτου άρτιου (5=3+2. Εδώ ο 1...), δεν θεωρήθηκε αριθμός, αλλά η πρώτη αρχή όλων των αριθμών), ήταν σύμβολο του γάμου. Οι τετράγωνοι αριθμοί συμβόλιζαν τη δικαιοσύνη (ανταπόδοση των ίσων). Υπήρχαν, επίσης, και κάποιοι συσχετισμοί ακατανόητοι: το 6 ήταν αριθμός της ψυχής, το 7 της αντίληψης και της υγείας, το 8 του έρωτα και της φιλίας...»

«...Ας θυμηθούμε μια στιγμή τη διαφορά μεταξύ ρητών (σύμμετρων) και άρρητων (ασύμμετρων) αριθμών. Οι ρητοί αριθμοί είναι οι κλασματικοί και οι ακέραιοι. Οι Έλληνες δεν γνώριζαν τους αρνητικούς αριθμούς. Ένας κλασματικός αριθμός μπορεί να παρασταθεί μ' ένα πηλίκο a/b, όπου a και b είναι ακέραιοι με $b \neq 0$ ... Οι ασύμμετροι αριθμοί είναι οι πραγματικοί αριθμοί που δεν μπορούν να παρασταθούν ως πηλίκα δύο ακεραίων»...

«Η ανακάλυψη ασύμμετρων ποσοτήτων υπήρξε αληθινή συμφορά για την Πυθαγόρεια φιλοσοφία, σύμφωνα με την οποία η ουσία κάθε όντος μπορεί να αναχθεί σε φυσικούς αριθμούς. Την ανακάλυψη αυτή τη συνοδεύουν πολλοί θρύλοι, που μερικοί από αυτούς αντιφάσκουν με άλλους. Άλλοι από τους θρύλους αναφέρονται σ' αυτήν την ίδια την ανακάλυψη κι άλλοι στον άνθρωπο που ανακάλυψε το μυστικό. Λέγεται πως αυτός ήταν ο Ίππασος. Η αποκάλυψη ανακαλύψεων των Πυθαγορείων προσέκρουε στον κανόνα ότι αυτές έπρεπε να μένουν άγραφα μυστικά της αδελφότητας. Σύμφωνα με κάποιο μύθο, οι Θεοί οργίστηκαν μ' αυτόν που αποκάλυψε το μυστικό και τον πνίξανε στη θάλασσα. Κατά μίαν άλλη διήγηση, αποδόθηκε τιμή στην ανακάλυψη με τη θυσία ενός βοδιού...».

Lucas N.H.Bunt, Phillip S. Jones, Jack D. Bedient:
"Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών», (3.7 σελίδες 92-93, 3.10 σελίδες 95,97)

1.1

Οι πραγματικοί αριθμοί και οι ιδιότητές τους

Τι καινούριο υπάρχει στην παράγραφο

Με την ύλη της παραγράφου αυτής θα μάθουμε:

1) να διακρίνουμε τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις τους και να ταξινομούμε συγκεκριμένους αριθμούς στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών $(\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}-\mathbb{Q})$,

2) να διερευνούμε την έννοια της «πυκνότητας» και της «διαδοχικότητας» στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών,

3) να συμβολίζουμε με διαστήματα τα σύνολα των πραγματικών αριθμών που προσδιορίζονται με ανισοτικές σχέσεις.

Απαραίτητες γνώσεις

Τα βασικά σύνολα των αριθμών:

1. το σύνολο των Φυσικών αριθμών: $\mathbb{N}=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,...\}$ *(Natural: «Φυσικός»),*

2. το σύνολο των Ακεραίων αριθμών: $\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,...\}$ *(Zahl: «Αριθμός»),*

3. το σύνολο των Ρητών αριθμών: $\mathbb{Q}$ που είναι οι αριθμοί που γράφονται στην κλασματική μορφή $\frac{\mu}{\nu}$ όπου μ, ν ακέραιοι με $\nu \neq 0$, *(Quotient: «πηλίκο»).*

4. Το σύνολο των Άρρητων αριθμών που είναι όσοι δεν είναι ρητοί.

5. Το σύνολο των Πραγματικών αριθμών που περιέχει τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς: $\mathbb{R}$ *(Real/«πραγματικός»)*

Εισαγωγική δραστηριότητα

α) Σε μια συζήτηση που ξεκίνησε στην τάξη με αφορμή τις διάφορες μορφές και τα σύνολα των αριθμών, ο καθηγητής Μαθηματικών ζήτησε από τους μαθητές να παρατηρήσουν τα αποτελέσματα των των παρακάτω διαιρέσεων $\frac{2}{5}=0{,}4$, $\frac{5}{4}=1{,}25$, $\frac{43.857}{10.000}=4{,}3857$, $\frac{1}{3}=0{,}33333333...$, $\frac{43}{99}=0{,}43434343...$, $\frac{285}{999}=0{,}285285285...$ και να διατυπώσουν συμπεράσματα σχετικά με τους δεκαδικούς αριθμούς που προκύπτουν. Ακούστηκαν οι εξής απόψεις: «Οι πρώτοι τρεις δεκαδικοί αριθμοί έχουν πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων», «Οι επόμενοι τρεις δεκαδικοί αριθμοί έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων», «Οι τρεις τελευταίοι δεκαδικοί αριθμοί έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία που παρουσιάζουν περιοδικότητα, δηλαδή επαναλαμβάνονται διαρκώς», *«Όλοι οι αριθμοί των αποτελεσμάτων είναι δεκαδικοί, μόνο οι τρεις πρώτοι είναι ρητοί, καθώς οι τρεις τελευταίοι έχουν δεκαδικά ψηφία, με συγκεκριμένο μέρος αυτών να επαναλαμβάνεται». Συμφωνείτε με τις απόψεις αυτές;*

β) Γνωρίζουμε όμως, ότι υπάρχουν δεκαδικοί αριθμοί όπως είναι οι π, $\sqrt{2}$ κ.ά. που το πλήθος των δεκαδικών τους ψηφίων δεν είναι πεπερασμένο ούτε παρουσιάζει κάποια περιοδικότητα. Σε ένα κομπιουτεράκι βλέπουμε από 8 έως 15 δεκαδικά ψηφία ανάλογα με τις θέσεις των δεκαδικών ψηφίων που εμφανίζει. Σε τι διαφέρουν οι δεκαδικοί αυτοί αριθμοί από τους δεκαδικούς αριθμούς του ερωτήματος α);

γ) Ένας αριθμός, που μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα, όπως γνωρίζουμε από το γυμνάσιο λέγεται **ρητός**. Η λέξη ρητός σημαίνει «έχει ειπωθεί» δηλαδή ρητός αριθμός είναι ο «ειπωμένος» δηλαδή εκφρασμένος είτε μέσω δεκαδικού αριθμού με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων είτε μέσω δεκαδικού αριθμού με άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων αλλά με περιοδικότητα στην εμφάνιση συγκεκριμένου πλήθους αυτών από κάποια δεκαδική θέση και έπειτα.

Επομένως οι δεκαδικοί του ερωτήματος α) είναι **ρητοί**. Όπως είδαμε όμως στο ερώτημα β) υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί που δεν μπορούν να «ειπωθούν» με ένα δεκαδικό αριθμό ακριβώς, αφού έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων ούτε εμφανίζουν περιοδικότητα. Πώς θα εκφράζατε αυτούς τους αριθμούς;

Ας δούμε τι έχει προκύψει

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί είτε ως **δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων** (π.χ. $\frac{5}{4}=1{,}25$) είτε ως **περιοδικός δεκαδικός** (π.χ. $\frac{4}{9}=0{,}444444...=0{,}\overline{4}$).

Αντίστροφα, κάθε δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων αλλά και κάθε περιοδικός δεκαδικός, μπορεί να πάρει κλασματική μορφή ρητού αριθμού (π.χ. $1{,}7523=\frac{17523}{10000}$, $1{,}757575...=\frac{175-1}{99}=\frac{174}{99}$ ενώ $1{,}3757575...=1{,}3\overline{75}=\frac{1375-13}{990}=\frac{1362}{990}$)

Άρρητοι είναι οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί και στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων μη περιοδικών. Συνεπώς, οι άρρητοι αριθμοί δε μπορούν να γραφούν ως κλάσματα με όρους ακεραίους, π.χ. ο αριθμός π = 3,14159265... (το πηλίκο του μήκους της περιφέρειας κάθε κύκλου προς τη διάμετρό του), e = 2,71828183... (η βάση των Φυσικών Λογάριθμων που θα μάθουμε και θα χρησιμοποιούμε σε επόμενη τάξη), κάθε τετραγωνική ρίζα φυσικού αριθμού που δεν είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού είναι άρρητος αριθμός όπως οι αριθμοί $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{14}$ κλπ είναι άρρητοι ενώ ο αριθμός $\sqrt{100}=10$ είναι ρητός. Το σύνολο που περιέχει τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς αποτελεί το σύνολο των **Πραγματικών** αριθμών και συμβολίζεται με $\mathbb{R}$. Το σύνολο των **Άρρητων** αριθμών δεν έχει συγκεκριμένο σύμβολο και το συμβολίζουμε: $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Όταν πραγματοποιούμε πράξεις μεταξύ ρητών και άρρητων αριθμών, το αποτέλεσμα εξαρτάται από το είδος της πράξης και τους συγκεκριμένους αριθμούς που εμπλέκονται. Για παράδειγμα «Ρητός + Άρρητος» το αποτέλεσμα είναι πάντα άρρητος. (π.χ. 3 + $\sqrt{2}$), ενώ «Ρητός · Άρρητος» το αποτέλεσμα είναι άρρητος εκτός αν ο ρητός είναι το 0. Οι πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών έχουν πάντα αποτέλεσμα ρητό αριθμό, ενώ οι πράξεις μεταξύ άρρητων αριθμών δεν έχουν πάντα αποτέλεσμα άρρητο αριθμό π.χ. $\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)=0$ ρητός, ενώ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ άρρητος.

Σχόλια

1. Στη μαθηματική κοινότητα υπάρχει διχογνωμία σχετικά με το αν το μηδέν θα πρέπει να περιλαμβάνεται ή όχι στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Για το λόγο αυτό, υπάρχει ο αντίστοιχος συμβολισμός του συνόλου $\mathbb{N}^*=\{1,2,3,...\}$ (ή συμβολικά $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}-\{0\}$), δηλαδή οι φυσικοί αριθμοί χωρίς το μηδέν.
   Αντίστοιχα, για τα υπόλοιπα σύνολα χωρίς το μηδέν γράφουμε $\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}-\{0\}$, $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}-\{0\}$, $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$.
   Στη συνέχεια του βιβλίου θα θεωρούμε ότι το μηδέν ανήκει στο σύνολο των φυσικών αριθμών.
2. Κάθε στοιχείο του συνόλου $\mathbb{N}$ είναι και στοιχείο του συνόλου $\mathbb{Z}$. Όμοια κάθε στοιχείο του συνόλου $\mathbb{Z}$ είναι και στοιχείο του συνόλου $\mathbb{Q}$ και τέλος κάθε στοιχείο του συνόλου $\mathbb{Q}$ είναι και στοιχείο του συνόλου $\mathbb{R}$. (Όπως θα αναφέρουμε σε επόμενο, τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ λέμε ότι είναι **υποσύνολα** του συνόλου $\mathbb{R}$).

Οι ιδιότητες των πραγματικών αριθμών

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης (+) και του πολλαπλασιασμού $(\cdot)$ και για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν οι ιδιότητες:

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΠΡΟΣΘΕΣΗ	ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ
Αντιμεταθετική ιδιότητα	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
Προσεταιριστική ιδιότητα	$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
Αντίθετο/Αντίστροφο στοιχείο	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\ \alpha\neq 0$
Επιμεριστική ιδιότητα	$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$	

Ασκήσεις κατανόησης

Να συμπληρώσετε με το σύμβολο ✓ σε κάθε κελί του πίνακα, ώστε ο αριθμός που αναφέρεται στην πρώτη γραμμή να ανήκει στο σύνολο που αναφέρεται στην πρώτη στήλη:

	$-3,5$	0	$\sqrt{10}$	$-\frac{13}{5}$	π	$2,\overline{3}$	$\frac{20}{5}$	$\sqrt{100}$	-5	$\sqrt{1,44}$	-3π	$2\sqrt{3}-\sqrt{5}$	$\sqrt{4}\cdot\sqrt{49}$	$3,14$
$\mathbb{N}$														
$\mathbb{Z}$														
$\mathbb{Q}$														
$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$														

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Μετά τη διάκριση των πραγματικών αριθμών σε ρητούς και άρρητους, εξετάζουμε σε ποιο από τα δύο αυτά υποσύνολα ανήκει ένας πραγματικός αριθμός ή το αποτέλεσμα των πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών, ελέγχοντας αν γράφεται ως κλάσμα με όρους ακέραιους αριθμούς.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να δείξετε ότι το εξαγόμενο της πράξης είναι ρητός αριθμός: $\frac{1}{\sqrt{5}-1}-\frac{1}{\sqrt{5}+1}$

ΛΥΣΗ

$$\frac{1}{\sqrt{5}-1}-\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\frac{2}{5-1}=\frac{1}{2}$$ ο οποίος είναι ρητός

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας α ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές β και γ μήκους:
α) $\beta=3$ **και** $\gamma=4$ **,** **β)** $\beta=1$ **και** $\gamma=1$
Είναι άρρητος ή ρητός αριθμός το μέτρο της υποτείνουσας που προκύπτει; Οι τετραγωνικές ρίζες είναι ρητοί ή άρρητοι αριθμοί;

Λύση

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, οπότε:

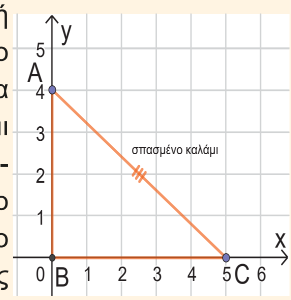
α) $\alpha^2 = 3^2 + 4^2$ που σημαίνει $\alpha^2 = 25$ που σημαίνει $\alpha = \sqrt{25} = 5$ ο οποίος είναι ρητός,

β) $\alpha^2 = 1^2 + 1^2$ που σημαίνει $\alpha^2 = 2$ που σημαίνει $\alpha = \sqrt{2}$ ο οποίος είναι άρρητος.

Ύπαρξη διαδοχικού αριθμού και η έννοια της πυκνότητας στα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών

Εισαγωγικη δραστηριότητα

1. Στο βιβλίο Chiu Chang Suan Shu (The Nine Chapters on the Mathematical Art), μια συλλογή μαθηματικών προβλημάτων από την Κίνα (10ο – 2ο αιώνα π.Χ.), συναντούμε το «Πρόβλημα του Σπασμένου Καλαμιού Bamboo»: Ένα καλάμι bamboo είναι φυτεμένο κατακόρυφα σε ένα χωράφι (στο σημείο B). Μια μέρα που είχε κακοκαιρία, ο δυνατός άνεμος έσπασε μέρος του καλαμιού (στο σημείο A) και το λύγισε, ώστε το σπασμένο μέρος να ακουμπήσει στο έδαφος (στο σημείο C), δημιουργώντας σχήμα ορθογώνιου τριγώνου.



Τι μήκος έχει η υποτείνουσα AC του τριγώνου (σπασμένο μέρος του καλαμιού), αν οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη τους διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς 4 (=AB) και 5 (=BC); Το αποτέλεσμα είναι ρητός ή άρρητος αριθμός; Μπορείτε να τον τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών;

2. Στην ερώτηση του Καθηγητή: *«Μπορούμε να βρίσκουμε διαδοχικούς φυσικούς, ώστε ο ένας να είναι ο επόμενος του άλλου όπως είναι του 4 ο αριθμός 5;»,* οι μαθητές απάντησαν: «Ναι, με βεβαιότητα».

Οι ερωτήσεις που ακολούθησαν, κινητοποίησαν όλη την τάξη και ξεκίνησε σχετική συζήτηση: *«Ποιος είναι όμως ο επόμενος του αριθμού* $\frac{1}{4}$ *ή ο προηγούμενος του* $\sqrt{41}$*;», «Υπάρχει ρητός αριθμός μεταξύ του* $\frac{1}{4}$ *και του* $\frac{3}{4}$*;», «Μπορείτε να βρείτε δύο (ή ακόμα και τρεις) ρητούς αριθμούς μεταξύ του* $\frac{1}{4}$ *και του* $\frac{3}{4}$*;» «Πόσοι ρητοί αριθμοί μπορεί να υπάρχουν μεταξύ του* $\frac{1}{4}$ *και του* $\frac{3}{4}$*»;*

Μπορείτε κι εσείς να πάρετε μέρος στη συζήτηση αυτή;

3. Πώς συμβολίζουμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς μεταξύ του $\frac{1}{4}$ και του $\frac{3}{4}$:

α) χωρίς να συμπεριλάβουμε τους αριθμούς $\frac{1}{4}$ και του $\frac{3}{4}$;

β) αν συμπεριλάβουμε και τους αριθμούς $\frac{1}{4}$ και του $\frac{3}{4}$;

Ας δούμε τι έχει προκύψει

Αν επιλέξουμε οποιονδήποτε φυσικό αριθμό, θα υπάρχει ο επόμενός του, π.χ. ο επόμενος του 200 είναι 201 και ο προηγούμενός του ο 199. Μόνο ο μηδέν δεν έχει προηγούμενο φυσικό αριθμό. Αυτή η ιδιότητα του συνόλου των φυσικών λέγεται ιδιότητα της «διαδοχικότητας». Την ιδιότητα της «διαδοχικότητας» έχει και το σύνολο των ακέραιων αριθμών, π.χ. ο επόμενος του -200 είναι ο -199 και ο προηγούμενός του είναι ο -201. Σύμφωνα με την ιδιότητα της «διαδοχικότητας»:

- Για οποιονδήποτε **φυσικό αριθμό ν** υπάρχει ο επόμενος φυσικός που είναι ο $\nu+1$ και αν $\nu \geq 1$ υπάρχει και ο προηγούμενος που είναι ο $\nu-1$. Το ίδιο συμβαίνει και για οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό. Δηλαδή:
- Για οποιονδήποτε **ακέραιο αριθμό κ** υπάρχει ο επόμενός που είναι ο $\kappa + 1$, αλλά και ο προηγούμενός του που είναι ο $\kappa-1$.

Σχόλιο

- Οι ρητοί αριθμοί είναι **«πυκνοί»** στον εαυτό τους δηλαδή μεταξύ δύο οποιονδήποτε ρητών αριθμών q και p υπάρχει ρητός αριθμός w, ώστε $q < w < p$. Αυτό διαφοροποιεί το σύνολο των ρητών από το σύνολο των φυσικών και των ακεραίων αριθμών. Ενώ για οποιονδήποτε φυσικό ή ακέραιο αριθμό υπάρχει ο επόμενός του δεν μπορούμε να ισχυριστούμε το ίδιο για οποιονδήποτε ρητό. Πράγματι, αν ισχυριστούμε ότι ο επόμενος του ρητού αριθμού q είναι ο p, ο ισχυρισμός είναι λάθος αφού υπάρχει ρητός w τέτοιος, ώστε $q<w<p$. Το αντίστοιχο ισχύει και για τους άρρητους αριθμούς που είναι **«πυκνοί»** στον εαυτό τους.
- Οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί είναι **«πυκνοί»** και στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha < \beta$ υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός ρ ώστε: $\alpha < \rho < \beta$ και για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha < \beta$ υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος x ώστε: $\alpha < x < \beta$. Ειδικά η ιδιότητα ότι οι ρητοί αριθμοί είναι «πυκνοί» στο $\mathbb{R}$ σημαίνει ότι για κάθε πραγματικό αριθμό μπορούμε να βρούμε *με οσοδήποτε καλή προσέγγιση θέλουμε* ρητό αριθμό. Αυτό είναι πολύ σημαντικό γιατί στην πράξη χρησιμοποιούμε μόνο ρητούς αριθμούς επειδή αυτούς γνωρίζουμε με ακρίβεια. Τους άρρητους δεν τους γνωρίζουμε με ακρίβεια γιατί έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία χωρίς περιοδικότητα. Έτσι, αν π.χ. θέλουμε να κατασκευάσουμε μια κυκλική πλατεία με ακτίνα δύο μέτρα και χρειάζεται κατά την κατασκευή της να υπολογίσουμε το εμβαδόν της θα το υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας, αντί για τον άρρητο αριθμό π τον οποίο δεν γνωρίζουμε με ακρίβεια, μια ρητή προσέγγιση του όπως για παράδειγμα το 3,14. Η ιδιότητα της πυκνής διάταξης που συναντάμε στο σύνολο των ρητών αριθμών, μπορεί να περιγραφεί με πληθώρα διαφορετικών εκφράσεων, οι οποίες ωστόσο είναι μαθηματικά ισοδύναμες:
  - Μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαφορετικών ρητών αριθμών, υπάρχει ένας άλλος ρητός. (απειρία των ενδιάμεσων)
  - Κανένας ρητός αριθμός δεν έχει επόμενο αριθμό (μη ύπαρξη επόμενου). Η ύπαρξη επόμενου αριθμού, αφορά μόνο το σύνολο των φυσικών και των ακεραίων αριθμών.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ – ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ"

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ – ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ"

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΔΙΑΔΟΧΙΚΟΤΗΤΑ – ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ"

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΤΑ ΠΑΡΑΔΟΞΑ ΤΟΥ ΖΗΝΩΝΑ"

Ασκήσεις κατανόησης

Α. Με απάντηση

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

α) Πόσοι ρητοί αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στους αριθμούς $\frac{3}{8}$ και $\frac{5}{8}$;

β) Ο επόμενος ακέραιος του -1 είναι ο μηδέν;

γ) Υπάρχει ο μικρότερος θετικός πραγματικός αριθμός; Αν ναι, ποιος είναι αυτός;

δ) Υπάρχει επόμενος πραγματικός αριθμός του 24,1; Αν ναι, τότε ποιος είναι;

ε) Είναι ο $\frac{4}{8}$ ο επόμενος ρητός αριθμός του $\frac{3}{8}$;

στ) Μπορείτε να βρείτε έναν αριθμό ανάμεσα στον $0,999...$ και στον 1;

Απαντήσεις

α) Μεταξύ των ρητών αριθμών $\frac{3}{8}$ και $\frac{5}{8}$ υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί.

β) Ναι.

γ) Όχι, γιατί αν είναι ο ελάχιστος πραγματικός αριθμός θα υπάρχει τουλάχιστον ένας άλλος θετικός πραγματικός αριθμός μεταξύ του 0 και του α.

δ) Υπάρχουν άπειροι πραγματικοί αριθμοί μεγαλύτεροι από το $24,1$ κανένας, όμως, δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως επόμενος.

ε) Όχι, γιατί $\frac{3}{8}=0,375$ ενώ $\frac{4}{8}=0,500$ και μεταξύ τους υπάρχουν άπειροι άλλοι ρητοί αριθμοί.

στ) Όχι, καθώς $0,\overline{9}=1$.

Β. Για εξάσκηση

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Τώρα πλέον έχουμε αναδείξει μια επιπλέον βασική διαφορά μεταξύ του συνόλου των ακέραιων και του συνόλου των ρητών αριθμών. Ακόμη, έχουμε διαπιστώσει ότι μπορούμε να αναζητούμε ρητούς μεταξύ δύο άλλων ρητών.

Λυμενες Εφαρμογες

Εφαρμογη 1

i) **Να βρείτε έναν ρητό αριθμό μεταξύ των αριθμών $\frac{2}{5}$ και $\frac{4}{5}$.**

ii) **Να βρείτε έναν ρητό αριθμό μεταξύ των αριθμών $\frac{3}{5}$ και $\frac{4}{5}$.**

iii) **Να βρείτε έναν ρητό αριθμό μεταξύ των αριθμών $\frac{1}{8}$ και $\frac{1}{7}$.**

iv) **Να βρείτε δύο ρητούς μεταξύ των αριθμών $\frac{1}{8}$ και $\frac{1}{7}$.**

Λυση

i) Ένας αριθμός είναι ο $\frac{3}{5}$.

ii) Επειδή $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ και $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$, ένας αριθμός είναι ο $\frac{7}{10}$.

iii) Επειδή $\frac{1}{8}=\frac{7}{56}=\frac{2\cdot 7}{2\cdot 56}=\frac{14}{112}$ και $\frac{1}{7}=\frac{8}{56}=\frac{2\cdot 8}{2\cdot 56}=\frac{16}{112}$, ένας αριθμός είναι ο $\frac{15}{112}$.

iv) Επειδή $\frac{1}{8}=\frac{7}{56}=\frac{3\cdot 7}{3\cdot 56}=\frac{21}{168}$ και $\frac{1}{7}=\frac{8}{56}=\frac{3\cdot 8}{3\cdot 56}=\frac{24}{168}$, δύοι αριθμοί είναι οι $\frac{22}{168}$ και $\frac{23}{168}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να βρεθούν τρεις άρρητοι αριθμοί μεταξύ των άρρητων αριθμών $\sqrt{\frac{3}{5}}$ και $\sqrt{\frac{4}{5}}$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε: $\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{5}$ και $\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{20}}{5}$.

Οπότε, τρεις αριθμοί είναι $\frac{\sqrt{17}}{5},\frac{\sqrt{18}}{5},\frac{\sqrt{19}}{5}$, αφού $\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}<\frac{\sqrt{17}}{5}<\frac{\sqrt{18}}{5}<\frac{\sqrt{19}}{5}<\frac{\sqrt{20}}{5}=\sqrt{\frac{4}{5}}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

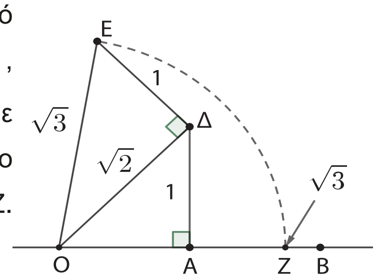
Να τοποθετήσετε τον αριθμό $\sqrt{3}$ πάνω στην αριθμογραμμή.

ΛΥΣΗ

Στο σημείο Α που παριστάνεται ο αριθμός 1 φέρνουμε τμήμα ΑΔ κάθετο στην ΟΑ με (ΟΑ) = 1. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΔ έχουμε:

$$(ΟΔ)^2=(ΟΑ)^2+(ΑΔ)^2,\ \text{δηλαδή}\ (ΟΔ)^2=1^2+1^2=2,\ \text{οπότε}\ (ΟΔ)=\sqrt{2}$$

Στο σημείο Δ φέρνουμε κάθετο τμήμα ΔΕ στην ΟΔ με (ΟΔ) = 1, οπότε από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΔΕ έχουμε $(ΟΕ)^2=(ΟΔ)^2+(ΔΕ)^2$, δηλαδή $(ΟΕ)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2=2+1=3$, οπότε $(ΟΕ)=\sqrt{3}$. Στη συνέχεια, με κέντρο το σημείο Ο που παριστάνεται ο αριθμός 0 (μηδέν) και με ακτίνα το τμήμα ΟΕ γράφουμε τόξο που τέμνει την αριθμογραμμή στο σημείο Ζ. Επομένως $(ΟΖ)=\sqrt{3}$. Άρα, ο αριθμός $\sqrt{3}$ απεικονίζεται στο σημείο Ζ.



Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ"

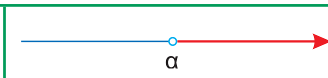
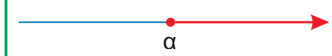
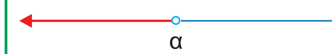
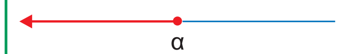
Τα διαστήματα των πραγματικών αριθμών

Συνέπεια της παραπάνω ιδιότητας της «πυκνότητας» των ρητών και άρρητων αριθμών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι ότι καθένα από τα παρακάτω υποσύνολα των πραγματικών αριθμών, που θα τα ονομάσουμε **διαστήματα πραγματικών αριθμών,** περιέχει άπειρους ρητούς ή άρρητους αριθμούς.

- Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με α < β. Ονομάζουμε:

ανοικτό διάστημα με άκρα τα α, β και το συμβολίζουμε (α,β) το σύνολο που περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς x μεταξύ των α και β χωρίς τα άκρα α και β, δηλαδή α < x < β,	
κλειστό διάστημα με άκρα τα α, β και το συμβολίζουμε [α, β] το σύνολο που περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς x μεταξύ των α και β μαζί με τα άκρα α και β, δηλαδή $α\le x\le β$,	
ανοικτό – κλειστό διάστημα με άκρα τα α, β και το συμβολίζουμε (α, β] το σύνολο που περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς x μεταξύ των α και β χωρίς το άκρο α αλλά με το άκρο β, δηλαδή α < x < β,	
κλειστό – ανοικτό διάστημα με άκρα τα α, β και το συμβολίζουμε [α, β) το σύνολο που περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς x μεταξύ των α και β με το άκρο α αλλά χωρίς το άκρο β, δηλαδή α < x < β.	

- Με παρόμοιο τρόπο συμβολίζουμε και τα παρακάτω **διαστήματα με άκρο τον πραγματικό αριθμό α**:

$(\alpha,+\infty)$: το διάστημα που περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς x που είναι μεγαλύτεροι του α, δηλαδή $x>\alpha$.	
$[\alpha,+\infty)$: το διάστημα που περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς x που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του α, δηλαδή $x\geq\alpha$.	
$(-\infty,\alpha)$: το διάστημα που περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς x που είναι μικρότεροι του α, δηλαδή $x<\alpha$.	
$(-\infty,\alpha]$: το διάστημα που περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς x που είναι μικρότεροι ή ίσοι του α, δηλαδή $x\leq\alpha$.	

Σχόλια

1. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ γράφεται με τη μορφή διαστήματος $(-\infty,+\infty)$.
2. Τα σημεία ενός διαστήματος Δ, που είναι διαφορετικά από τα άκρα του, λέγονται **εσωτερικά σημεία** του διαστήματος Δ.
3. Τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$, που διαβάζονται «συν άπειρο» και «πλην άπειρο» αντίστοιχα, δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς. *(Η λέξη «άπειρο» προκύπτει από το στερητικό πρόθεμα «α-» και τη λέξη «πέρας» που σημαίνει τέλος. Συνεπώς το άπειρο είναι αυτό που δεν έχει τέλος).*
4. Με τη βοήθεια των διαστημάτων των πραγματικών αριθμών μπορούμε να αναπαραστήσουμε σύνολα λύσεων ανισώσεων και εξισώσεων.

Ασκήσεις κατανόησης

Α. Με απάντηση:

Να συμπληρωθεί ο διπλανός πίνακας:

Ανισότητα	Διάστημα
$1<x\leq 3$	$(1,3]$
$x\geq 2$	$[2,+\infty)$
$x\leq 8$	$(-\infty,8]$
$-3<x<2$	$(-3,2)$
$-1\leq x\leq 0$	$[-1,0]$
$-5\leq x<5$	$[-5,5)$
$x\geq -3$ και $x\leq 10$	$[-3,10]$
$x<-1$	$(-\infty,-1)$

Β. Για εξάσκηση:

Να εκφράσετε τα πιο κάτω διαστήματα τιμών της μεταβλητής x σε μορφή ανισότητας και να τα παρουσιάσετε γραφικά στην ευθεία των πραγματικών αριθμών:

α) $[-1,\ 3]$, β) $\left(-2,\ \frac{2}{3}\right)$, γ) $(-\infty,-1]$, δ) $(-2,+\infty)$, ε) $[-3,\ \pi)$

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Τα διαστήματα είναι ένας συμβολικός τρόπος περιγραφής ανισοτήτων ή συνόλων λύσεων ανισώσεων.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις παρουσιάζεται η γραφική αναπαράσταση ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών. Να εκφράσετε την κάθε περίπτωση σε μορφή διαστήματος, όπως στο παράδειγμα:

: Διάστημα: [1,4)

α)

β)

γ)

ΛΥΣΗ

α) $(-3,-1)$, **β)** $[-1,\ 2]$, **γ)** $(-\infty,2)$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

i) **Να δείξετε ότι: αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει ότι $\alpha<\beta$, τότε $\alpha<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\beta$.**

ii) **Με τη βοήθεια του ερωτήματος i) να διαπιστώσετε ότι: ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς, υπάρχουν άπειροι πραγματικοί.**

ΛΥΣΗ

i) Αν $\alpha<\beta$, τότε:

- $\alpha+\alpha<\alpha+\beta$ δηλαδή $2\alpha<\alpha+\beta$ δηλαδή $\alpha<\dfrac{\alpha+\beta}{2}$
- $\alpha+\beta<\beta+\beta$ δηλαδή $\alpha+\beta<2\beta$ δηλαδή $\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\beta$

Τελικά $\alpha<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\beta$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ο αριθμός $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ λέγεται **αριθμητικός μέσος** των α και β και απεικονίζεται στο μέσο του διαστήματος με άκρα τα α και β αφού $\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha=\dfrac{\alpha+\beta-2\alpha}{2}=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ και $\beta-\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{2\beta-\alpha-\beta}{2}=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$.

ii) Η ύπαρξη άπειρων πραγματικών αριθμών, μεταξύ δύο άλλων, αποδεικνύεται με τη *μέθοδο της* ***Διχοτόμησης Διαστημάτων***: Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, με α < β σύμφωνα με το ερώτημα (i) υπάρχει ο αριθμός $\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ με το οποίο διχοτομούμε το διάστημα (α, β) σε δύο άλλα διαστήματα (α, γ) και (γ, β), όπου γ το μέσο του διαστήματος (α, β).

Σε καθένα από τα διαστήματα (α, γ) και (γ, β) αντίστοιχα, θα υπάρχει, τουλάχιστον ένας πραγματικός αριθμός, έστω $δ_1$, $δ_2$, όπου $δ_1$ το μέσο του διαστήματος (α, γ) και $δ_2$ το μέσο του διαστήματος (γ, β).

Συνεχίζοντας τη διαδικασία αυτή, διαπιστώσαμε ότι μεταξύ των α, β βρίσκονται άπειροι πραγματικοί αριθμοί.

Ασκήσεις – Προβλήματα

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη $4+\sqrt{2}$, $4-\sqrt{2}$ αντίστοιχα. Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

i) Τα μήκη των καθέτων πλευρών είναι ρητοί ή άρρητοι αριθμοί.
ii) Η περίμετρος του τριγώνου είναι ρητός ή άρρητος αριθμός.
iii) Το εμβαδόν του τριγώνου είναι ρητός ή άρρητος αριθμός.
iv) Το μήκος της υποτείνουσας ρητός ή άρρητος αριθμός.

2. Να αποδείξετε ότι αν ρ ρητός και x άρρητος αριθμός τότε:

i) Το άθροισμα ρ + x είναι άρρητος αριθμός.

ii) Αν $ρ \neq 0$, το γινόμενο $ρ \cdot x$ είναι άρρητος αριθμός.

iii) Αν $(α,\ γ)$ το πηλίκο $\frac{ρ}{x}$ είναι άρρητος αριθμός.

Θέματα κριτικής σκέψης

1. Να σημειώσετε τους αριθμούς $\frac{13}{3}$, $-\frac{13}{3}$, $\sqrt{51}$ και $-\sqrt{51}$ πάνω στην αριθμογραμμή. (Για την ακρίβεια των σημείων χρησιμοποιείστε γεωμετρικά όργανα).

2. Αν ο α είναι πραγματικός αριθμός και ισχύει ότι $α > 99$, τότε η πρώτη τιμή που μπορεί να πάρει ο α είναι:

i) 100,
ii) 99,01,
iii) άλλος αριθμός,
iv) δεν υπάρχει

1.2

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Τι καινούργιο υπάρχει στην παράγραφο

Με τη ύλη της παραγράφου αυτής θα μάθουμε:

1) να ορίζουμε την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού και να τη συνδέουμε με την απόσταση του αριθμού από το μηδέν. Επίσης, να ερμηνεύουμε γεωμετρικά την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο πραγματικών αριθμών,

2) να αποδεικνύουμε τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής.

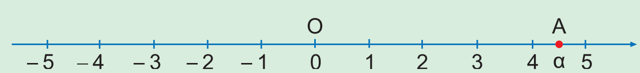
Απαραίτητες γνώσεις

Θυμόμαστε ότι:

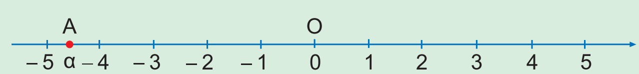
Ο **γεωμετρικός** ορισμός της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού α είναι:
απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού α, η οποία συμβολίζεται με $|\alpha|$, ονομάζεται η απόσταση του σημείου Α, στο οποίο παριστάνεται ο πραγματικός αριθμός α από την αρχή Ο της αριθμογραμμής.

Δηλαδή:

$(OA)=|\alpha|=\alpha$, αν $\alpha \geq 0$



$(OA)=|\alpha|=-\alpha$, αν $\alpha < 0$

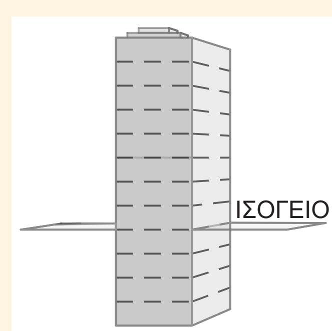


Σχόλιο

Όταν ο αριθμός α είναι αρνητικός, είδαμε ότι $|\alpha|=-\alpha$. Το "–" στην περίπτωση αυτή δεν συμβολίζει πρόσημο αλλά ένδειξη ότι ο αριθμός $-\alpha$ είναι ο αντίθετος του αριθμού α, αφού η απόλυτη τιμή ως απόσταση είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός.

Εισαγωγική Δραστηριότητα

Οι περισσότεροι ουρανοξύστες στις ΗΠΑ στο τέλος του 19^{ου} αιώνα, είχαν ένα ισόγειο, ορόφους πάνω και γκαράζ κάτω από αυτό. Στο σχήμα βλέπουμε το ισόγειο, οκτώ ορόφους και τέσσερα υπόγεια γκαράζ. Οι ένοικοι, επισκέπτες ή εργαζόμενοι, μετακινούνταν με δύο διαφορετικούς ανελκυστήρες, οι οποίοι είχαν ένδειξη που ενημέρωνε για την απόσταση από το ισόγειο.



1) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Ένδειξη Ανελκυστήρα	Απόσταση από το ισόγειο	Απόλυτη τιμή
+2	2	2
–4		
4		
0		
+8		

2) Ποια είναι η απόσταση από το ισόγειο γενικά ενός ανελκυστήρα που βρίσκεται στη θέση x;

3) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, όπως η πρώτη στήλη.

Ένδειξη ανελκυστήρα 1	+ 7	– 1	0	+2
Ένδειξη ανελκυστήρα 2	–2	0	–4	+7
Διαφορά ενδείξεων ανελκυστήρων 1 και 2	(+7)–(–2) = 9 ή (–2)–(+7) = –9			
Απόσταση θέσεων ανελκυστήρων 1 και 2	9			
Απόλυτη τιμή διαφοράς ενδείξεων ανελκυστήρων 1 και 2	|(+7)–(–2)| = |9| = 9 ή |(–2)–(+7)| = |–9| = 9			

4) Να συγκρίνετε τις δύο τελευταίες γραμμές του πίνακα που συμπληρώσατε στο ερώτημα 3). Ποιον κανόνα θα διατυπώνατε για την απόσταση των θέσεων των ανελκυστήρων με ένδειξη x και y.

Ας δούμε τι έχει προκύψει

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού α

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, οδηγούμαστε στον ακόλουθο **αλγεβρικό** ορισμό για την απόλυτη τιμή:

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται ως $\boxed{|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha < 0 \end{cases}}$.

Σχόλια

Σύμφωνα με τον ορισμό, για τον υπολογισμό μιας απόλυτης τιμής είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε το πρόσημο του αριθμού (ή της παράστασης) που βρίσκεται στο εσωτερικό της απόλυτης τιμής. Άμεσες συνέπειες του ορισμού της απόλυτης τιμής είναι οι ακόλουθες σχέσεις, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί.

1. $|x| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$

2. $|x| \geq x$ και $|x| \geq -x$

3. $-|x| \leq x \leq |x|$

4. $|x| = |-x| \geq 0$

5. $|x|^2 = x^2$

6. Αν $|x| + |y| = 0$, τότε x = y =0 και αντιστρόφως.

7. Αν $|x| + |y| \neq 0$, τότε ένας τουλάχιστον εκ των x, y είναι διάφορος του μηδενός.

8. Αν $|x| = \theta$, με θ>0, τότε x = θ ή x = – θ και αντιστρόφως.

9. Αν $|x| = |y|$, τότε: $x = y$ ή $x = -y$ και αντιστρόφως.

Δραστηριότητα

Χρησιμοποιώντας τον αλγεβρικό ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού, να αποδείξετε τις παραπάνω άμεσες συνέπειες του ορισμού της απόλυτης τιμής.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ"

Ασκήσεις κατανόησης

Α. Με απάντηση:

Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις:

α) $|3-\pi|$ **β)** $|4-\pi|$ **γ)** $\left|\sqrt{5}-\sqrt{3}\right|$ **δ)** $\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|$

Απάντηση

α) $|3-\pi|=-(3-\pi)=\pi-3$ **γιατί** $3-\pi<0$, **γ)** $\left|\sqrt{5}-\sqrt{3}\right|=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ **γιατί** $\sqrt{5}-\sqrt{3}>0$,

β) $|4-\pi|=4-\pi$ **γιατί** $4-\pi>0$, **δ)** $\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **γιατί** $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$

Β. Για εξάσκηση:

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Με τις γνώσεις που προκύπτουν από τον αλγεβρικό ορισμό και τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού μπορούμε να υπολογίζουμε, απλοποιούμε και χειριζόμαστε αριθμητικές και αλγεβρικές παραστάσεις

ΛΥΜΕΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις:

α) $A_1=|\pi-3|$, $A_2=|\pi-4|$, $A_3=\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|$, $A_4=\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right|$.

β) $B_1=\left|\alpha^2+1\right|$, $B_2=\left|-1-\alpha^4\right|$, **για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α.**

γ) $\Gamma_1=|2x-10|$, $\Gamma_2=|x-2|-2-\left(|6-3x|-4\right)$ **για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x.**

δ) $\Delta=\dfrac{|3-x|-|3+x|}{2}$, **για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x.**

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $\pi-3\simeq3{,}14-3=0{,}14>0$ έχουμε $A_1=|\pi-3|=\pi-3$, ενώ $\pi-4\simeq3{,}14-4=-0{,}86<0$ οπότε, $A_2=|\pi-4|=-(\pi-4)=4-\pi$.

Επειδή $\sqrt{3}>\sqrt{2}$ έχουμε: $\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$ οπότε $A_3=\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ενώ $\sqrt{3}<\sqrt{5}$ άρα $\sqrt{3}-\sqrt{5}<0$ επομένως $A_4=\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right|=-\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

β) Επειδή για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2+1>0$ έχουμε $B_1=\left|\alpha^2+1\right|=\alpha^2+1$ και αφού για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $-1-\alpha^4<0$ έχουμε $\left|-1-\alpha^4\right|=-\left(-1-\alpha^4\right)=1+\alpha^4$.

γ) Για το Γ_1: επειδή το πρόσημο της παράστασης που έχουμε μέσα στο απόλυτο δεν είναι σταθερό για κάθε πραγματικό αριθμό x, διακρίνουμε περιπτώσεις:

1η περίπτωση: αν $2x-10<0$ δηλαδή $x<5$, τότε $\Gamma_1=|2x-10|=-(2x-10)=-2x+10$

2η περίπτωση: αν $2x-10\geq0$ δηλαδή $x\geq5$, τότε $\Gamma_1=|2x-10|=2x-10$, οπότε γράφουμε:

$$\Gamma_1=|2x-10|=\begin{cases}-2x+10 & \text{αν } x<5\\ 2x-10 & \text{αν } x\geq5\end{cases}$$

Για το Γ_2: έχουμε:

$$\Gamma_2 = |x-2|-2-(|6-3x|-4) = |x-2|-2-3|2-x|+4 = |x-2|-2-3|x-2|+4 = 2-2|x-2|$$

Άρα: $\Gamma_2 = \begin{cases} 2-2(-x+2) & ,x-2<0 \\ 2-2(x-2) & ,x-2\geq 0 \end{cases}$ δηλαδή $\Gamma_2 = \begin{cases} -2+2x & ,x<2 \\ 6-2x & ,x\geq 2 \end{cases}$

δ) Στο παράδειγμα αυτό παρατηρούμε ότι το πρόσημο και των δύο παραστάσεων μέσα στα απόλυτα δεν είναι σταθερό για κάθε πραγματικό αριθμό x. Για τη διερεύνηση του προσήμου των παραστάσεων αυτών διακρίνουμε περιπτώσεις που φαίνονται στον διπλανό πίνακα προσήμων.

x	$-\infty$	-3		3		$+\infty$
$3-x$	+		+	**0**	–	
$3+x$	–	**0**	+		+	

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1) αν $x\leq -3$, τότε $3-x>0$ και $3+x\leq 0$, οπότε $\Delta = \dfrac{(3-x)-(-3-x)}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

2) αν $-3<x\leq 3$, τότε $3-x\geq 0$ και $3+x>0$, οπότε $\Delta = \dfrac{(3-x)-(3+x)}{2} = \dfrac{-2x}{2} = -x$

3) αν $x>3$, τότε $3-x<0$ και $3+x>0$, οπότε $\Delta = \dfrac{(-3+x)-(3+x)}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$

Άρα, η παράσταση γράφεται: $\Delta = \begin{cases} 3 \text{ αν } x\leq -3 \\ -x \text{ αν } -3<x\leq 3 \\ -3 \text{ αν } x>3 \end{cases}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

i) Αν $\alpha<\beta<\gamma$ να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις:

α) $A = |\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|+|\gamma-\alpha|$ **β) $B = |2\alpha-\beta-\gamma|$**

ii) Αν $5<x<10$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\Gamma = \dfrac{|x-5|}{x-5}+\dfrac{|x-10|}{x-10}$

ΛΥΣΗ

i) α) Επειδή $\alpha<\beta$ ισχύει $\alpha-\beta<0$. Αφού $\beta<\gamma$ είναι $\beta-\gamma<0$. Επειδή $\alpha<\gamma$ ισχύει $\gamma-\alpha>0$.

Επομένως, $A = |\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|+|\gamma-\alpha| = -(\alpha-\beta)-(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha) = -\alpha+\beta-\beta+\gamma+\gamma-\alpha = 2\gamma-2\alpha$.

β) Επειδή $\alpha<\beta$ ισχύει $\alpha-\beta<0$ (1). Όμως είναι και $\alpha<\gamma$ οπότε $\alpha-\gamma<0$ (2).
Με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει ότι: $2\alpha-\beta-\gamma<0$.

Άρα, $B = |2\alpha-\beta-\gamma| = -(2\alpha-\beta-\gamma) = -2\alpha+\beta+\gamma$.

ii) Επειδή $5<x<10$ ισχύει: $x-5>0$ και $x-10<0$.

Άρα $\Gamma = \dfrac{|x-5|}{x-5}+\dfrac{|x-10|}{x-10} = \dfrac{x-5}{x-5}+\dfrac{-(x-10)}{x-10} = 1+(-1) = 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να βρείτε τους αριθμούς x, y στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $|x-2|+|2y-3|\leq 0$ **ii) $|x+5|+y^2-6y=-9$**

ΛΥΣΗ

i) Το άθροισμα μη αρνητικών ποσοτήτων δεν μπορεί να είναι αρνητικό, επομένως

$x-2=0$ και $2y-3=0$, οπότε $x=2$ και $y=\frac{3}{2}$.

ii) Παρατηρούμε ότι: $|x+5|+y^2-6y=-9$ σημαίνει $|x+5|+y^2-6y+9=0$, δηλαδή $|x+5|+(y-3)^2=0$.

Έχουμε πάλι άθροισμα μη αρνητικών ποσοτήτων αυτή τη φορά ίσο με μηδέν, άρα υποχρεωτικά: $x=-5$ και $y=3$.

Σχόλιο

- Αν $|x|+|y|\le 0$, τότε x = 0 και y = 0 και αντίστροφα.
- Αν $|x|+y^2\le 0$, τότε x = 0 και y = 0 και αντίστροφα.

Μερικές χρήσιμες σχέσεις:

Θυμόμαστε από το Γυμνάσιο την ακόλουθη ιδιότητα των ανισοτήτων:

- για θετικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει ότι: «Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$ τότε $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\delta$», την οποία μπορούμε να γενικεύσουμε χρησιμοποιώντας περισσότερες ανισότητες. Έτσι:
- «Αν $\alpha_1>\beta_1, \alpha_2>\beta_2, ..., \alpha_\nu>\beta_\nu$ τότε $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot...\alpha_\nu>\beta_1\cdot\beta_2\cdot...\cdot\beta_\nu$», όταν όλα τα μέλη των ανισοτήτων είναι θετικοί αριθμοί.

Επίσης:

- για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν, ισχύει: « Αν $\alpha>\beta$ τότε $\alpha^\nu>\beta^\nu$ και αντιστρόφως »,
- για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν, ισχύει ότι:

« Αν $\alpha=\beta$ τότε: $\alpha^\nu=\beta^\nu$ και αντιστρόφως »

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να αποδείξετε ότι: αν $|x-3y|=|y-3x|$, τότε $|x|=|y|$ και αντίστροφα.

ΛΥΣΗ

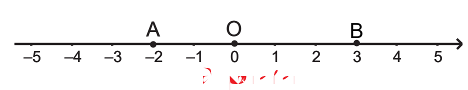
Αν $|x-3y|=|y-3x|$, τότε $|x-3y|^2=|y-3x|^2$ οπότε $(x-3y)^2=(y-3x)^2$, συνεπώς

$x^2-6xy+9y^2=y^2-6xy+9x^2$, δηλαδή $8x^2=8y^2$, συνεπώς $x^2=y^2$ επομένως $|x|^2=|y|^2$, άρα $|x|=|y|$

και αντιστρόφως (γιατί;)

Απόσταση δύο αριθμών

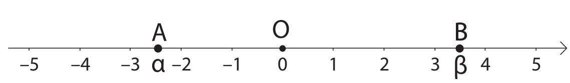
Στη διπλανή αριθμογραμμή η απόσταση των αριθμών –2 και 3 ισούται με το μήκος του τμήματος ΑΒ που είναι 5 μονάδες, όπου Α το σημείο που παριστάνεται ο αριθμός –2 και Β το σημείο που παριστάνεται ο αριθμός 3.



Παρατηρούμε ότι $(AB)=5=|(-2)-3|$ είτε $|3-(-2)|$.

Γενικά:

απόσταση δύο αριθμών α και β στην αριθμογραμμή ονομάζεται ο μη αρνητικός αριθμός: $|\alpha-\beta|$ ή $|\beta-\alpha|$. Αν Α το σημείο στο οποίο απεικονίζεται ο αριθμός α και Β το σημείο στο οποίο απεικονίζεται ο αριθμός β στην αριθμογραμμή, τότε η απόσταση των αριθμών α και β ισούται με το μήκος του τμήματος ΑΒ.



$d(\alpha,\beta)=(AB)=|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$

π.χ. $d(3,-5)=|3-(-5)|=|3+5|=|8|=8$ είτε $d(3,-5)=|-5-3|=|-8|=-(-8)=8$

$d(-13,27)=|-13-27|=|-40|=-(-40)=40$ είτε $d(-13,27)=|27-(-13)|=|27+13|=|40|=40$

Για την απόσταση μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών α, β ισχύει:
- $d(\alpha,\beta)\geq 0$,
- $d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$,
- $d(\alpha,\beta)=0$ αν και μόνο αν $\alpha=\beta$ (γιατί;)

Σημαντικό ρόλο στην επίλυση προβλημάτων με απόλυτες τιμές (όπως είναι οι εξισώσεις και οι ανισώσεις που θα ασχοληθούμε στο 4ο κεφάλαιο) έχουν οι έννοιες του **μήκους**, του **κέντρου** και της **ακτίνας** ενός διαστήματος [α,β].

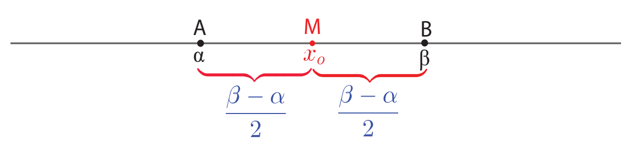
Έστω πραγματικοί αριθμοί α, β με α < β και το διάστημα [α,β] με άκρα τους αριθμούς α, β.

- Το **μήκος** του διαστήματος [α,β] είναι η απόσταση των α και β και ισούται με:

$$(AB)=d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|=\beta-\alpha$$

- Το **κέντρο** του διαστήματος [α,β] είναι ο αριθμός $x_0=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

  Πράγματι, αν Α και Β τα σημεία στα οποία παριστάνονται οι αριθμοί α και β στην αριθμογραμμή και Μ το σημείο που παριστάνεται το μέσο x_0 του διαστήματος, τότε θα ισχύει: $(AM)=(MB)$ που σημαίνει $d(\alpha,x_0)=d(x_0,\beta)$ δηλαδή $|x_0-\alpha|=|x_0-\beta|$ επομένως $x_0-\alpha=\beta-x_0$ (εφόσον $\alpha<x_0<\beta$), οπότε $2x_0=\alpha+\beta$, άρα $x_0=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.



- Η **ακτίνα** του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ είναι ο αριθμός $\rho=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$.

Σημείωση

Το μήκος, το κέντρο και η ακτίνα των διαστημάτων (α, β], [α, β), (α,β) είναι το μήκος, το κέντρο και η ακτίνα του διαστήματος [α,β].

Παράδειγμα

Τα διαστήματα $(-3,7),[-3,7],[-3,7)$ και $(-3,7]$ έχουν μήκος $|7-(-3)|=|10|=10$,

κέντρο $x_0=\dfrac{-3+7}{2}=\dfrac{4}{2}=2$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{7-(-3)}{2}=\dfrac{7+3}{2}=\dfrac{10}{2}=5$

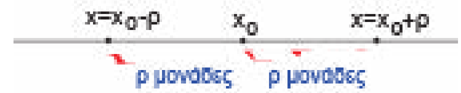
Με τη βοήθεια της έννοιας της απόστασης δύο αριθμών ερμηνεύουμε τις σχέσεις:

$$|x-x_0|=\rho\ ,\ |x-x_0|<\rho\ ,\ |x-x_0|>\rho$$

Για παράδειγμα, η ισότητα $|x-3|=2$ που γράφεται και ως $d(x,3)=2$ αναφέρεται στους αριθμούς x που απέχουν από τον αριθμό 3 απόσταση ίση με 2 μονάδες και όπως φαίνεται στην αριθμογραμμή είναι οι αριθμοί $x=3-2$ ή $x=3+2$ που σημαίνει $x=1$ ή $x=5$.

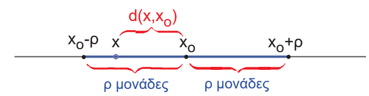
Γενικά:

η ισότητα $|x-x_0|=\rho$ που γράφεται και ως $d(x,x_0)=\rho$, όπου x_0 συγκεκριμένος αριθμός και $\rho>0$ αναφέρεται στους αριθμούς x που απέχουν από τον αριθμό x_0 απόσταση ίση με ρ και, όπως φαίνεται στην αριθμογραμμή, είναι οι αριθμοί $x=x_0-\rho$ ή $x=x_0+\rho$ (σχ. 1).



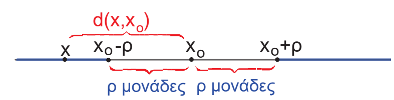
(σχ.1)

Όμοια έχουμε ότι: Η ανισότητα $|x-x_0|<\rho$ που γράφεται και ως $d(x,x_0)<\rho$, όπου x_0 συγκεκριμένος αριθμός και $\rho>0$ αναφέρεται στους αριθμούς x που απέχουν από τον αριθμό x_0 απόσταση μικρότερη από ρ και, όπως φαίνεται στην αριθμογραμμή, είναι οι αριθμοί που επαληθεύουν την ανισότητα $x_0-\rho<x<x_0+\rho$ και ανήκουν στο διάστημα $(x_0-\rho,\ x_0+\rho)$ (σχ. 2).



(σχ.2)

Αν $x_0=0$, τότε $|x|<\rho$ που γράφεται $d(x,0)<\rho$, η ανισότητα γίνεται: $-\rho<x<\rho$ και το διάστημα $(-\rho,\rho)$. Επίσης:



(σχ.3)

Η ανισότητα $|x-x_0|>\rho$ που γράφεται και ως $d(x,x_0)>\rho$, όπου x_0 συγκεκριμένος αριθμός και $\rho>0$ αναφέρεται στους αριθμούς x που απέχουν από τον αριθμό x_0 απόσταση μεγαλύτερη από ρ και, όπως φαίνεται στην αριθμογραμμή, είναι οι αριθμοί που επαληθεύουν τις ανισότητες: $x<x_0-\rho$ ή $x>x_0+\rho$ και ανήκουν στα διαστήματα $(-\infty,x_0-\rho)$ ή $(x_0+\rho,+\infty)$ (σχ. 3).

Αν $x_0=0$ τότε $|x|>\rho$ που γράφεται $d(x,0)>\rho$, οι ανισότητα γίνεται $x<-\rho$ ή $x>\rho$ και τα διαστήματα $(-\infty,-\rho)$ ή $(\rho,+\infty)$.

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών εκφράζει γεωμετρικά την απόστασή τους και μας δίνει τη δυνατότητα να εκφράζουμε με τη βοήθειά της ανισότητας και διαστήματα πραγματικών αριθμών.

Λυμενες Εφαρμογες

Εφαρμογη 1

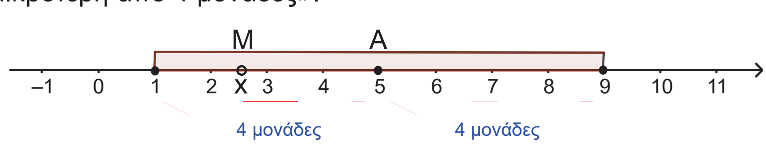
Δίνονται πάνω στην αριθμογραμμή τα σημεία Α, Β και Μ στα οποία αντιστοιχίζονται οι αριθμοί 5, 8 και x αντίστοιχα.

i) **Να διατυπώσετε γεωμετρικά τις σχέσεις $|x-5|\le 4$ και $|x-8|\ge 2$.**

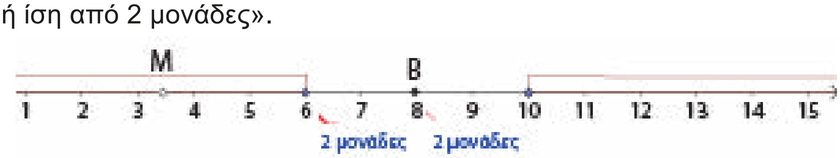
ii) **Με τη βοήθεια της αριθμογραμμής να δώσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x, ώστε να αληθεύουν και οι δύο ανισότητες του ερωτήματος i).**

Λυση

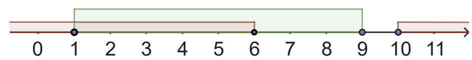
i) Η ανισότητα $|x-5|<4$ που γράφεται και ως $d(x,5)<4$, σημαίνει ότι «η απόσταση του σημείου Μ από το Α είναι μικρότερη από 4 μονάδες».



$|x-8|\ge 2$ που γράφεται και ως $d(x,8)\ge 2$, σημαίνει ότι «η απόσταση του σημείου Μ από το Β είναι μεγαλύτερη ή ίση από 2 μονάδες».



ii) Οι τιμές του x για τις οποίες αληθεύουν και οι δύο ανισότητες φαίνονται στην παρακάτω αριθμογραμμή και είναι οι αριθμοί που βρίσκονται στο διάστημα $(1,6)$.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να συμπληρώσετε τον πίνακα, όπως στις πρώτες δύο γραμμές:

Απόσταση	Απόλυτη τιμή	Ανισότητα	Διάστημα
$d(x,2)<3$	$\|x-2\|<3$	$2-3<x<2+3$ δηλαδή $-1<x<5$	$(-1,5)$
$d(x,3)>2$	$\|x-3\|>2$	$x<3-2$ ή $x>3+2$ δηλαδή $x<1$ ή $x>5$	$(-\infty,1)$ ή $(5,+\infty)$
d(x – 1) < 2			
	$\|x+3\|\geq 5$		
		$2<x<6$	
			$(-\infty,-11)$ ή $(-3,+\infty)$

ΛΥΣΗ

Απόσταση	**Απόλυτη τιμή**	**Ανισότητα**	**Διάστημα**
$d(x,-1)<2$	$\|x-(-1)\|<2$ δηλαδή $\|x+1\|<2$	$-1-2<x<-1+2$ δηλαδή $-3<x<1$	$(-3,1)$
$d(x,-3)\geq 5$	$\|x+3\|\geq 5$ δηλαδή $\|x-(-3)\|\geq 5$	$x\leq -3-5$ ή $x\geq -3+5$ δηλαδή $x\leq -8$ ή $x\geq 2$	$(-\infty,-8]$ ή $[2,+\infty)$
$d(x,4)<2$	$\|x-4\|<2$	$2<x<6$ δηλαδή $4-2<x<4+2$	$(2,6)$ κέντρο: $\frac{2+6}{2}=4$, ακτίνα: $\frac{6-2}{2}=2$
$d(x,-7)>4$	$\|x-(-7)\|>4$ δηλαδή $\|x+7\|>4$	$x<-11$ ή $x>-3$ κέντρο: $\frac{(-11)+(-3)}{2}=\frac{-14}{2}=-7$ ακτίνα: $\frac{(-3)-(-11)}{2}=\frac{8}{2}=4$	$(-\infty,-11)$ ή $(-3,+\infty)$

Ασκήσεις – Προβλήματα

1) Αντιστοιχίστε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το αντίστοιχο στοιχείο της στήλης Β:

Στήλη Α (Σχέση που ικανοποιεί ο πραγματικός x)	Στήλη Β (Ανισοτικές σχέσεις)
i) $\lvert x+2\rvert > 5$	**Α)** $1 < x < 3$
ii) $\lvert x-4\rvert < 1$	**Β)** $-3 < x < -1$
iii) $d(x,\ 2) < 1$	**Γ)** $3 < x < 5$
iv) $d(1,\ x) \geq 2$	**Δ)** $x < -7$ ή $x > 3$
	Ε) $-1 \leq x \leq 3$
	ΣΤ) $x \leq -1$ ή $x \geq 3$

2) Στην προσπάθειά του να θυμηθεί τη σχέση «τετραγωνικής ρίζας» και «δύναμης τετραγώνου», ένας μαθητής απάντησε στα παρακάτω ερωτήματα ως εξής:

i) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \ldots$

Απάντηση μαθητή: Αφού $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ έχουμε ότι $\sqrt{2}-1 > 0$, συνεπώς $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \sqrt{2}-1$.

ii) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \ldots$

Απάντηση μαθητή: Αφού $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ έχουμε ότι $\sqrt{2}-1 > 0$, συνεπώς $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \sqrt{2}-1$.

iii) $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} = \ldots$

Απάντηση μαθητή: Σύμφωνα με τα παραπάνω, «δύναμη τετραγώνου» και «τετραγωνική ρίζα» αλληλοεξουδετερώνονται, οπότε και εδώ $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} = 1-\sqrt{2}$.

Συμφωνείτε με το συλλογισμό του μαθητή;

3) Να συμπληρώσετε τις ισότητες, χωρίς τις απόλυτες τιμές:

i) $\lvert -7\rvert = \ldots$ **ii)** $\left\lvert -\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right\rvert = \ldots$ **iii)** $\lvert \sqrt{2}-1\rvert = \ldots$ **iv)** $\lvert 1-\sqrt{2}\rvert = \ldots$

v) $\lvert \sqrt{2}-2\rvert = \ldots$ **vi)** $\lvert 3-\pi\rvert = \ldots$ **vii)** $\lvert 2^{50}-5^{25}\rvert = \ldots$

4) Να αποδείξετε ότι:

Α. $\dfrac{\lvert\alpha-1\rvert}{\lvert 1-\alpha\rvert} - \dfrac{\lvert\beta+1\rvert}{\lvert -1-\beta\rvert} + \dfrac{\lvert\beta-\alpha+\gamma\rvert}{\lvert\alpha-\beta-\gamma\rvert} = 1$, **Β.** $\big\lvert \lvert x\rvert - x\big\rvert - \big\lvert \lvert x\rvert + x\big\rvert + 2x = 0$, **Γ.** $\lvert\alpha+\beta\rvert^2 + \lvert\alpha-\beta\rvert^2 = 2\lvert\alpha\rvert^2 + 2\lvert\beta\rvert^2$

5) Αν $\alpha < 2 < \beta$ να αποδείξετε ότι $\lvert\beta-\alpha\rvert - \lvert\beta-2\rvert - \lvert\alpha-2\rvert = 0$ και $\big\lvert \lvert\alpha-2\rvert + \lvert\beta-2\rvert \big\rvert = \beta-\alpha$

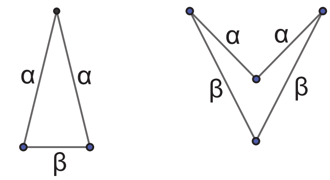
6) **Α.** Αν $2 < x < 4$, να δείξετε ότι η παράσταση $A = \lvert x-2\rvert - \lvert 4-x\rvert - 2x$, είναι σταθερή.

Β. Αν $-2 < x < 1$ και $-2 < y < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση $B = \lvert x+3y+8\rvert + \lvert x+2y-3\rvert - y$ είναι ανεξάρτητη των x, y.

7) Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $3 < x < 4$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $A = |x-3| + |x-4|$ **ii)** $B = |x-2| + |x-5|$

8) Αν $|\alpha - 2| < 0{,}3$ και $|\beta - 5| < 0{,}2$, να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των διπλανών σχημάτων:



9) Να αποδειχτεί ότι αν $x \cdot y \cdot z \neq 0$, τότε $\dfrac{x}{|x|} + \dfrac{y}{|y|} + \dfrac{z}{|z|} \leq 3$.

10) Να αποδειχθεί ότι:

i) $x^2 + |x \cdot y| + |-x| \cdot y + y \cdot |-y| = \left(|x| + |y|\right) \cdot \left(|x| + y\right)$, για οποιουσδήποτε πραγματικούς x, y.

ii) $|x + y| \geq |x - y| - 2|x|$, για οποιουσδήποτε πραγματικούς x, y.

11) Αν ισχύει $|2x - y| > |x - 2y|$, να αποδείξετε ότι: $|x| > |y|$, για οποιουσδήποτε πραγματικούς x, y.

12) Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α και β αν $|2\alpha - 1| + |3 - 2\alpha - 5\beta| = 0$.

13) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α διάφορο του μηδενός ισχύει $\left(1 + \dfrac{\alpha}{|\alpha|}\right)\left(\alpha - |\alpha|\right) = 0$.

14) Να βρείτε τις πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση: $A = \dfrac{|x|}{x} + \dfrac{|y|}{y}$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και y με $x \neq 0$ και $y \neq 0$.

15) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x, y, για τους οποίους: $0 < x < y$.

i) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $1, \dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{x}$.

ii) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς $\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{x}$ βρίσκεται πιο κοντά στον αριθμό 1.

Θέματα Κριτικής Σκέψης

1) Μια βιοτεχνία κατασκευάζει μεταλλικές ράβδους. Η ιδανική διάμετρος μιας μεταλλικής ράβδου είναι $6{,}35$ εκατοστά, με επιτρεπτό σφάλμα $\pm 0{,}127$ εκατοστά.

i) Να γράψετε το μαθηματικό μοντέλο της απόκλισης της διαμέτρου δ των ραβδών από την ιδανική διάμετρο.

ii) Να βρείτε τις διαμέτρους των ραβδών που θα απορριφθούν από τη παραγωγή.

iii) Να επιλέξετε, βάσει των παραπάνω στοιχείων, τις κατάλληλες ράβδους, από τις προτεινόμενες:

Α. $6{,}392$ εκατοστά **Β.** $6{,}202$ εκατοστά **Γ.** $6{,}309$ εκατοστά **Δ.** $6{,}497$ εκατοστά

2) Μια εταιρεία που προωθεί νέα στην αγορά σοκολατάκια διενεργεί τον ακόλουθο διαγωνισμό για τους πελάτες του σε ένα supermarket: «Μαντέψτε τον ακριβή αριθμό από σοκολατάκια που περιέχονται μέσα στο βάζο -με σφάλμα προσέγγισης 5 σοκολατάκια- και κερδίστε δωροεπιταγές για αγορά προϊόντων μας από το κατάστημα». Γνωρίζουμε πως τα σοκολατάκια στο βάζο είναι ακριβώς 232:

i) Να εκφράσετε με ένα μαθηματικό μοντέλο την επιτρεπτή απόκλιση των απαντήσεων x των πελατών από τον πραγματικό αριθμό του περιεχομένου του βάζου.

ii) Να βρείτε τον μέγιστο και τον ελάχιστο αριθμό από σοκολατάκια που μπορεί να μαντέψει ένας διαγωνιζόμενος, ώστε να κερδίσει το δώρο.

3) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x ισχύει ότι $\sqrt{\left(x^2 - 2x + 1\right)^2} = x^2 - 2x + 1$;

Ιδιότητες της απόλυτης τιμής

Για πράξεις μεταξύ των πραγματικών αριθμών και τις απόλυτες τιμές ισχύουν οι εξής ιδιότητες:
Για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

- $|\alpha\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$ **(1)**
- $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}, \quad \beta \neq 0$ **(2)**
- $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ **(3)**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1) Καθώς και τα δύο μέλη της ισότητας είναι μη αρνητικοί αριθμοί, για να ισχύει η (1) αρκεί να ισχύει η $|\alpha\beta|^2 = (|\alpha|\cdot|\beta|)^2$ ή $(\alpha\beta)^2 = |\alpha|^2\cdot|\beta|^2$ ή $\alpha^2\beta^2 = \alpha^2\beta^2$, η οποία είναι αληθής.

2) Καθώς και τα δύο μέλη της ισότητας είναι μη αρνητικοί αριθμοί για να ισχύει η (2) αρκεί να ισχύει η $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|^2 = \left(\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\right)^2$ ή $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \dfrac{|\alpha|^2}{|\beta|^2}$ ή $\dfrac{\alpha^2}{\beta^2} = \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$, η οποία είναι αληθής.

3) Καθώς και τα δύο μέλη της ανισότητας είναι μη αρνητικοί αριθμοί για να ισχύει (3) αρκεί να ισχύει: $|\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha|+|\beta|)^2$ ή $(\alpha+\beta)^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\beta| + |\beta|^2$ ή $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha\cdot\beta| + \beta^2$ ή $2\alpha\beta \leq 2|\alpha\beta|$ ή $|\alpha\beta| \geq \alpha\beta$ η οποία είναι αληθής.

Σχόλιο

- Η ιδιότητα (1) ισχύει και για περισσότερους παράγοντες, δηλαδή για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α_1, α_2, α_3, ..., α_ν με ν θετικό ακέραιο ισχύει $|\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\cdot\ldots\cdot\alpha_\nu| = |\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdot|\alpha_3|\cdot\ldots\cdot|\alpha_\nu|$.
  Στην ειδική περίπτωση όπου $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots \alpha_\nu = \alpha$ έχουμε $|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu$.
- Επίσης η ιδιότητα (3) ισχύει και για περισσότερους προσθετέους, έτσι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu$ με ν θετικό ακέραιο ισχύει:
  $$|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_\nu| \leq |\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|+\ldots+|\alpha_\nu|.$$

Ασκήσεις κατανόησης

Α. Με απάντηση:

Να χαρακτηρίσετε ως αληθείς (Α) ή ψευδείς (Ψ) τους παρακάτω ισχυρισμούς:

i) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

α) $|\alpha+\beta| \geq |\alpha|+|\beta|$ **β)** $|\alpha-\beta| \leq |\alpha|-|\beta|$ **γ)** $|\alpha-\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$

ii) $\left|\dfrac{x}{|x|}\right| = \dfrac{x}{|x|}$, για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $x \neq 0$.

iii) $\dfrac{|\beta-\alpha|}{|\alpha\cdot\beta|}\cdot\dfrac{|\alpha|\cdot|\beta|}{|\alpha-\beta|} = 1$, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς με $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \beta \neq \alpha$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

i) α) Ψ, **β)** Ψ, **γ)** Α, **ii)** Ψ, **iii)** Α

Β. Για εξάσκηση:

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Οι ιδιότητες των απόλυτων τιμών μας δίνουν πολλές δυνατότητες στον λογισμό παραστάσεων με απόλυτα, όπως πράξεις, απλοποιήσεις, αποδείξεις σχέσεων κ.λπ.

Λυμενες Εφαρμογες

Εφαρμογη 1

Δίνοντας συγκεκριμένες ομόσημες και ετερόσημες τιμές στους αριθμούς α και β να συγκρίνετε κάθε φορά τις ποσότητες $\left||\alpha|-|\beta|\right|$ και $|\alpha+\beta|$. Μπορείτε να διατυπώσετε μια εικασία για τη σχέση των παραπάνω ποσοτήτων για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β; Να αποδείξετε στη συνέχεια την εικασία που διατυπώσατε. Πότε ισχύει η ισότητα;

Απαντηση

1η περίπτωση: Για α = 3 και β = 5 ισχύει: $\left||\alpha|-|\beta|\right|=\left||3|-|5|\right|=|3-5|=|-2|=2$, $|3+5|=|8|=8$.

Άρα: $\left||\alpha|-|\beta|\right|<|\alpha+\beta|$ (1)

2η περίπτωση: Για α = –3 και β = 5 ισχύει: $\left||\alpha|-|\beta|\right|=\left||-3|-|5|\right|=|3-5|=|-2|=2$, $|-3+5|=|2|=2$.

Άρα: $\left||\alpha|-|\beta|\right|=|\alpha+\beta|$ (2)

3η περίπτωση: Για α = 3 και β = –5 ισχύει: $\left||\alpha|-|\beta|\right|=\left||3|-|-5|\right|=|3-5|=|-2|=2$, $|3+-5|=|-2|=2$.

Άρα: $\left||\alpha|-|\beta|\right|=|\alpha+\beta|$ (3)

4η περίπτωση: Για α = –3 και β = –5 ισχύει: $\left||\alpha|-|\beta|\right|=\left||-3|-|-5|\right|=|3-5|=|-2|=2$, $|(-3)+(-5)|=|-8|=8$.

Άρα: $\left||\alpha|-|\beta|\right|<|\alpha+\beta|$ (4)

Διατυπώνουμε λοιπόν την εικασία ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει: $\left||\alpha|-|\beta|\right|\le|\alpha+\beta|$. Για να **αποδείξουμε** την εικασία που διατυπώσαμε επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας είναι μη αρνητικοί αριθμοί αρκεί να ισχύει: $\left||\alpha|-|\beta|\right|^2\le|\alpha+\beta|^2$ ή $\left(|\alpha|-|\beta|\right)^2\le(\alpha+\beta)^2$ ή

$|\alpha|^2-2|\alpha|\cdot|\beta|+|\beta|^2\le\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ ή $\alpha^2-2|\alpha\beta|+\beta^2\le\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ ή $-2|\alpha\beta|\le2\alpha\beta$ ή $\alpha\beta\ge-\alpha\beta$ η οποία είναι αληθής. Η ισότητα ισχύει αν $\alpha\beta\le0$ δηλαδή αν α, β ετερόσημοι ή α = 0 ή β = 0.

Εφαρμογη 2

Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α και β με $\alpha\neq0$ και $\beta\neq0$ ισχύει $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\ge2$ (1).

Λυση

1ος τρόπος

Για να ισχύει η (1) αρκεί να ισχύει $\frac{|\alpha|}{|\beta|}+\frac{|\beta|}{|\alpha|}\ge2$ ή $\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{|\alpha|\cdot|\beta|}\ge2$ ή $|\alpha|^2+|\beta|^2\ge2|\alpha|\cdot|\beta|$ ή

$|\alpha|^2+|\beta|^2-2\cdot|\alpha|\cdot|\beta|\ge0$ ή $\left(|\alpha|-|\beta|\right)^2\ge0$ η οποία είναι αληθής.

2ος τρόπος

Επειδή $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\ge\left|\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right|$ αρκεί να ισχύει ότι $\left|\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right|\ge2$ ή $\left|\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right|\ge2$ ή $\frac{|\alpha^2+\beta^2|}{|\alpha\beta|}\ge2$ ή $\alpha^2+\beta^2\ge2\cdot|\alpha\beta|$

ή $|\alpha|^2+|\beta|^2\ge2\cdot|\alpha|\cdot|\beta|$ ή $|\alpha|^2+|\beta|^2-2\cdot|\alpha|\cdot|\beta|\ge0$ ή $\left(|\alpha|-|\beta|\right)^2\ge0$, η οποία είναι αληθής.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Έστω πραγματικοί αριθμοί x και y τέτοιοι, ώστε $|x-y| \geq 4$. Να δείξετε ότι:

i) $|x-1|+|1-y| \geq 4$, **ii)** $|x|+|y| \geq 4$

ΛΥΣΗ

i) Εφαρμόζοντας την ιδιότητα $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ για $\alpha = x-1$ και $\beta = 1-y$ έχουμε:

$$|x-1|+|1-y| \geq |(x-1)+(1-y)| = |x-1+1-y| = |x-y| \geq 4$$

ii) $|x|+|y| = |x|+|-y| \geq |x+(-y)| = |x-y| \geq 4$

Ασκήσεις – Προβλήματα

1) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y, ω ισχύει:

i) $|x+y+\omega| \leq |x|+|y|+|\omega|$

iii) $|x-y| \leq |x|+|y|$

iv) $|x-\omega| \leq |x-y|+|y-\omega|$

v) $|x|-|y| \leq |x-y|$

2) Αν $\left|\dfrac{\alpha+2\beta}{2\alpha+\beta}\right| \leq 1$ να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| \leq 1$

3) Αν $|\alpha-\beta| \leq 1013$ και $|\beta-\gamma| \leq 1013$ να αποδείξετε ότι $|\alpha-\gamma| \leq 2026$

4) Αν $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 3$ να αποδειχθεί ότι:

i) $|x+3y| \leq 10$,

ii) $|3x-2y| \leq 9$

5) Αν $x+y=10$ να αποδειχθεί ότι $|x-2|+|y-3| \geq 5$

6) Χρησιμοποιώντας τη σχέση $|x| = \sqrt{x^2}$, να αποδείξετε ότι:

i) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, για οποιουσδήποτε πραγματικούς α, β.

ii) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$, για οποιουσδήποτε πραγματικούς α, β, με $\beta \neq 0$.

7) Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x \cdot |y| = -y \cdot |x|$, να δείξετε ότι οι x, y είναι ετερόσημοι.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο προκειμένου να απαντήσετε στο σύντομο test που προτείνεται.

1.3

Νιοστή ρίζα μη αρνητικού πραγματικού αριθμού, Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Τι καινούργιο υπάρχει στην παράγραφο

Με την ύλη της παραγράφου αυτής θα μάθουμε:

1) ότι η νιοστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού ορίζεται ως η μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^{\nu}=\alpha$ και θα αποδεικνύουμε τις βασικές ιδιότητες (γινόμενο και πηλίκο) ριζών,

2) ότι ορίζονται δυνάμεις με ρητό εκθέτη και θα διερευνήσουμε τις ιδιότητές τους,

3) να χρησιμοποιούμε τον ορισμό και τις ιδιότητες των νιοστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στον υπολογισμό της τιμής αριθμητικών παραστάσεων.

Απαραίτητες γνώσεις

Στο Γυμνάσιο μάθαμε:

1. ότι η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α $(\alpha\geq 0)$ είναι η μοναδική μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης: $x^2=\alpha$ και τη συμβολίσαμε $\sqrt{\alpha}$, (ορισμός τετραγωνικής ρίζας μη αρνητικού πραγματικού αριθμού).

2. τις ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών:

Α) Αν $\alpha,\beta\geq 0$ τότε ισχύει: $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$,

Β) Αν $\alpha\geq 0$ και $\beta>0$ τότε ισχύει: $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$,

Γ) Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, ισχύει: $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$ (γιατί;)

Δ) Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ και $\beta\geq 0$, ισχύει: $\sqrt{\alpha^2\cdot\beta}=|\alpha|\cdot\sqrt{\beta}$

Ε) Για κάθε $\alpha\geq 0$ ισχύει: $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$.

3. Τις **δυνάμεις των πραγματικών αριθμών** και τις ιδιότητές τους:

• Αν ν φυσικός αριθμός διάφορος του μηδενός, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει:

$$\boxed{\alpha^{\nu}=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu-\text{παράγοντες}}}\,.$$

• Αν ν φυσικός αριθμός, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha\neq 0$ ισχύει:

$$\boxed{\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}}}\quad\text{και}\quad\boxed{\alpha^0=1}$$

• Για κάθε τιμή των α και β και για κάθε ακέραια τιμή των κ και λ ώστε οι παραστάσεις που αναφέρονται να ορίζονται, ισχύουν:

$$\alpha^{\kappa}\cdot\alpha^{\lambda}=\alpha^{\kappa+\lambda},\qquad \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}=\alpha^{\kappa-\lambda},\qquad (\alpha\cdot\beta)^{\kappa}=\alpha^{\kappa}\cdot\beta^{\kappa},\qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}=\frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}},\qquad \left(\alpha^{\kappa}\right)^{\lambda}=\alpha^{\kappa\cdot\lambda}$$

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο «ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ»

Εισαγωγική Δραστηριότητα

Σε μια σχολική τάξη Α' Λυκείου, ο καθηγητής στα πλαίσια του μαθήματος των Μαθηματικών χώρισε τους μαθητές της τάξης σε 3 ομάδες (Α, Β, Γ) και ζήτησε από την κάθε ομάδα να υπολογίσει εντός μιας εικονικής πόλης τα εξής κατασκευαστικά έργα που θα βελτίωναν τη ζωή της πόλης: την κατασκευή ενός σιντριβανιού και την κατασκευή μιας δεξαμενής νερού.

1) Αν το σιντριβάνι έχει σχήμα τετραγώνου, ποιο θα πρέπει να είναι το μήκος της πλευράς του, ώστε να καταλαμβάνει έκταση 144 τετραγωνικών μέτρων;

2) Αν η δεξαμενή έχει σχήμα κύβου, ποιο θα πρέπει να είναι το μήκος της ακμής του, ώστε να έχει όγκο 216 κυβικών μέτρων;

- Η ομάδα Α υπολόγισε την κατασκευή του σιντριβανιού με μήκος πλευράς τα 15 μέτρα και την κατασκευή της δεξαμενής με μήκος ακμής τα 6 μέτρα.
- Η ομάδα Β υπολόγισε την κατασκευή του σιντριβανιού με μήκος πλευράς τα 12 μέτρα και την κατασκευή της δεξαμενής με μήκος ακμής τα 10 μέτρα.
- Η ομάδα Γ υπολόγισε την κατασκευή του σιντριβανιού με μήκος πλευράς τα 12 μέτρα και την κατασκευή της δεξαμενής με μήκος ακμής τα 6 μέτρα.

3) Ποια από τις τρεις ομάδες θεωρείτε πως επέλεξε τη σωστή λύση; Ποια πιστεύετε πως ήταν τα λάθη στους υπολογισμούς των δύο άλλων ομάδων και γιατί; Ακολουθώντας τον ορισμό, αλλά και το συμβολισμό της τετραγωνικής ρίζας, της προηγούμενης παραγράφου, προσπαθήστε (με τη βοήθεια του Καθηγητή σας) να ορίσετε και να συμβολίσετε με αντίστοιχο τρόπο, το ζητούμενο αποτέλεσμα.

4) Οι ομάδες στη προσπάθειά τους να συνθέσουν τις προτάσεις τους θα έπρεπε μεταξύ άλλων να βρουν τρόπο να συμβολίσουν:

- την πλευρά του σιντριβανιού ως δύναμη με βάση το 144
- την ακμή της δεξαμενής ως δύναμη με βάση το 216

Ο καθηγητής τους βοήθησε λέγοντάς τους να χρησιμοποιήσουν κομπιουτεράκι και να πληκτρολογήσουν: $144^{\frac{1}{2}}$ και $\sqrt{144}$ καθώς επίσης, $216^{\frac{1}{3}}$ και $\sqrt[3]{216}$. Πώς πιστεύετε ότι προχώρησαν οι ομάδες;

Ας δούμε τι έχει προκύψει

Η νιοστή ρίζα μη αρνητικού πραγματικού αριθμού α

Ορίζουμε ως νιοστή ρίζα του μη αρνητικού αριθμού α $(\alpha \geq 0)$ και συμβολίζουμε $\sqrt[\nu]{\alpha}$ τη μοναδική μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^{\nu} = \alpha$ με ν θετικό ακέραιο αριθμό. Η νιοστή ρίζα του μη αρνητικού αριθμού α είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, αν υψωθεί εις την ν, θα δώσει αποτέλεσμα α.

ν δείκτης ή τάξη της ρίζας

σύμβολο ρίζας

$\sqrt[\nu]{\alpha}$ ← υπόριζος ποσότητα

Για $\nu = 1$, $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$ διαβάζεται: 1η ρίζα ή ρίζα πρώτης τάξης του α, για $\nu = 2$, $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$ διαβάζεται: 2η ρίζα ή ρίζα δεύτερης τάξης ή τετραγωνική ρίζα του α, για $\nu = 3$, $\sqrt[3]{\alpha}$ διαβάζεται: 3η ρίζα ή ρίζα τρίτης τάξης ή κυβική ρίζα του α και για $\nu = 4,5,6,\ldots$, $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[5]{\alpha}, \sqrt[6]{\alpha},\ldots$ διαβάζεται 4η, 5η, 6η,… ρίζα ή ρίζα τέταρτης, πέμπτης, έκτης τάξης του α, κ.λπ.

Παραδείγματα

$\sqrt[3]{64} = 4$ διότι $4^3 = 64$ και $4 \geq 0$, $\sqrt[4]{16} = 2$ αφού $2^4 = 16$ και $2 \geq 0$, $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$ διότι $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ και $\frac{1}{2} \geq 0$, $\sqrt[6]{0{,}000001} = \sqrt[6]{10^{-6}} = \sqrt[6]{\frac{1}{10^6}} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ διότι $(0{,}1)^6 = 0{,}000001$ και $0{,}1 \geq 0$

Από τον ορισμό της νιοστής ρίζας μη αρνητικού πραγματικού αριθμού α προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

1) για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \ge 0$ ισχύει $\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha} \ge 0}$,

2) για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \ge 0$ και ν θετικό ακέραιο, ισχύει $\boxed{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha}$, αφού ο αριθμός $\sqrt[\nu]{\alpha}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^{\nu} = \alpha$.

3) Επίσης, για κάθε $\alpha \ge 0$ και ν θετικό ακέραιο, ισχύει $\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \alpha}$, αφού ο μη αρνητικός αριθμός είναι ρίζα της εξίσωσης $x^{\nu} = \alpha^{\nu}$ που ρίζα της είναι ο αριθμός α.

4) Αν ν άρτιος, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \le 0$ ισχύει $\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = |\alpha|}$, ενώ για να ορίζεται η ποσότητα $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}$ με ν περιττό, πρέπει και αρκεί να είναι $\alpha \ge 0$.

5) Αν α, β μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει ότι:
αν $\alpha > \beta$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\beta}$ και αντιστρόφως. *(Υπόδειξη: βλ. παράγραφο 1.2, σελίδα 22)*

Για τις νιοστές ρίζες μη αρνητικού πραγματικού αριθμού α ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \ge 0$ και ν θετικός ακέραιος ισχύει:

1) $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$ **2)** $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}, \ \beta \ne 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αποδείξεις

1) Επειδή $\sqrt[\nu]{\alpha}, \ \sqrt[\nu]{\beta}, \ \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} \ge 0$ αρκεί να ισχύει ότι $\left(\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}\right)^{\nu}$ ή $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} \cdot \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} = \alpha \cdot \beta$ ή $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$ η οποία είναι αληθής!

2) Επειδή $\sqrt[\nu]{\alpha}, \ \sqrt[\nu]{\beta}, \ \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}} \ge 0$ αρκεί να ισχύει ότι $\left(\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}\right)^{\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)^{\nu}$ ή $\dfrac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}}{\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ ή $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ η οποία ισχύει!

Σχόλιο

1. Η ιδιότητα (1) ισχύει και για περισσότερους από δύο μη αρνητικούς παράγοντες. Έτσι, για τους μη αρνητικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ έχουμε: $\sqrt[\nu]{\alpha_1} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_\kappa} = \sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\kappa}$.

2. Στην ειδική περίπτωση όπου $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\kappa = \alpha$, η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$\underbrace{\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \ldots \cdot \sqrt[\nu]{\alpha}}_{\kappa-\text{παράγοντες}} = \sqrt[\nu]{\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\kappa-\text{παράγοντες}}}$, δηλαδή: $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\kappa} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}}$.

3. Από την ιδιότητα 1 προκύπτει ότι $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu} \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$ για κάθε α,β μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς (γιατί;). Στην περίπτωση όπου ν άρτιος, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό α και $\beta \ge 0$ ισχύει: $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu} \cdot \beta} = |\alpha| \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$.

Ασκήσεις κατανόησης

Α. Με απάντηση:

1) Είναι σωστό ή λάθος να γράψουμε: $\sqrt[4]{81} = -3$;

Απάντηση

Είναι λάθος διότι, ναι μεν ισχύει $(-3)^4 = 81$, όμως $\sqrt[4]{81} \ge 0$. Το σωστό είναι $\sqrt[4]{81} = 3$.

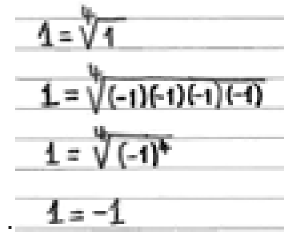
2) Είναι σωστό ή λάθος να γράψουμε $\sqrt[3]{-27}=-3$.

Απάντηση

Είναι λάθος, διότι αφ' ενός μεν δεν ορίζεται 3^{η} τάξεως ρίζα αρνητικού αριθμού, αφετέρου οι νιοστές ρίζες είναι μη αρνητικοί αριθμοί.

3) Ένας μαθητής έγραψε στο τετράδιό του τις εξής γραμμές:

Προφανώς κατέληξε σε λάθος! Μπορείτε να βρείτε σε ποιο σημείο ακριβώς έγινε το λάθος;



Απάντηση

Είναι λάθος, γιατί $\sqrt[4]{(-1)^4}=|-1|=1$ αφού, αν ν άρτιος και α < 0, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=|\alpha|$.

Β. Για εξάσκηση:

1) Να σημειώσετε με το σύμβολο ✓ σε κάθε κελί του πίνακα, ώστε ο αριθμός που αναφέρεται στη 1η γραμμή να ανήκει στο σύνολο που αναφέρεται στη 1η στήλη.

	$\sqrt{5}$	$\left(\sqrt{3}\right)^2$	$2\cdot\sqrt[3]{27}$	$-\sqrt[3]{343}$	$\sqrt[5]{(0{,}01)^5}$
$\mathbb{N}$					
$\mathbb{Z}$					
$\mathbb{Q}$					
$\mathbb{R}$					

2) Να εξηγήσετε πώς καταλήξαμε στα παρακάτω αποτελέσματα:

i) $\sqrt[3]{8}=\ldots=2$, **ii)** $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}=\ldots=\dfrac{1}{2}$, **iii)** $\sqrt[3]{0{,}125}=\ldots=0{,}5$, **iv)** $\sqrt{3^{10}}=\ldots=243$,

v) $\sqrt[2026]{0}=\ldots=0$, **vi)** $\sqrt[3]{4^{15}}=\ldots=1024$

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Από τα δύο τελευταία ερωτήματα της εισαγωγικής δραστηριότητας (σελίδα 32) διαπιστώσατε ότι αν συμβολίζατε ως δύναμη με βάση το 144 την πλευρά της πλατείας δηλαδή $\sqrt{144}=144^\rho$ θα είχατε: $\sqrt{144}\cdot\sqrt{144}=144$ δηλαδή $\sqrt{144}=144^\rho$, οπότε $144^\rho\cdot144^\rho=144$, δηλαδή $144^{2\rho}=144$, άρα 2ρ = 1 επομένως $\rho=\dfrac{1}{2}$. Άρα $\sqrt{144}=144^{\frac{1}{2}}$. Όμοια για τη πλευρά της δεξαμενής: $\sqrt[3]{125}\cdot\sqrt[3]{125}\cdot\sqrt[3]{125}=125$ οπότε $125^\rho\cdot125^\rho\cdot125^\rho=125$, άρα 3ρ = 1, επομένως $\rho=\dfrac{1}{3}$. Άρα ισχύει: $\sqrt[3]{125}=125^{\frac{1}{3}}$. Να το επαληθεύσετε με το κομπιουτεράκι σας. Μήπως λοιπόν ισχύει ότι: $\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{\nu}}}$ με $\alpha\geq0$;

Αν επεκτείνουμε την ιδιότητα των δυνάμεων: $\left(\alpha^\mu\right)^\nu=\alpha^{\mu\cdot\nu}$ που ισχύει για ακεραίους εκθέτες και στην περίπτωση που οι εκθέτες είναι ρητοί αριθμοί, θα έχουμε:

- Για $\alpha>0$, $\left(\alpha^{\frac{1}{3}}\right)^3=\alpha^{\frac{1}{3}\cdot3}=\alpha^1=\alpha$, δηλαδή αριθμός $\alpha^{\frac{1}{3}}$ είναι η μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^3=\alpha$, επομένως είναι ο αριθμός $\sqrt[3]{\alpha}$. Άρα $\alpha^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\alpha}$, με $\alpha>0$.
- Για $\alpha>0$, $\left(\alpha^{\frac{2}{3}}\right)^3=\alpha^{\frac{2}{3}\cdot3}=\alpha^2$ δηλαδή ο αριθμός $\alpha^{\frac{2}{3}}$ είναι η μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^3=\alpha^2$, επομένως είναι ο αριθμός $\sqrt[3]{\alpha^2}$. Άρα $\alpha^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\alpha^2}$, με $\alpha>0$.

- Για $\alpha>0$, $\left(\alpha^{\frac{-3}{4}}\right)^4=\alpha^{\frac{-3}{4}\cdot 4}=\alpha^{-3}=\frac{1}{\alpha^3}$ δηλαδή ο αριθμός $\alpha^{\frac{-3}{4}}$ είναι η μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^4=\alpha^{-3}$, επομένως είναι ο αριθμός $\sqrt[4]{\alpha^{-3}}$. Άρα $\alpha^{\frac{-3}{4}}=\sqrt[4]{\alpha^{-3}}=\sqrt[4]{\frac{1}{\alpha^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^3}}$, με $\alpha>0$.

Γενικότερα:

Για $\alpha>0$ θα πρέπει $\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^\nu=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}\cdot\nu}=\alpha^\mu$, δηλαδή ο αριθμός $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu=\alpha^\mu$. Για τη συγκεκριμένη εξίσωση, όμως, γνωρίζουμε πως η μη αρνητική λύση της είναι η $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, οπότε οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό:

Αν μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε για κάθε α > 0, ορίζουμε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$.

Ειδικά, αν μ και ν θετικοί ακέραιοι, τότε $0^{\frac{\mu}{\nu}}=0$. Επίσης, $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}}=\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}$

Παραδείγματα

Για α > 0 έχουμε $\alpha^{\frac12}=\sqrt{\alpha}$, $\alpha^{\frac23}=\sqrt[3]{\alpha^2}$, $\alpha^{-\frac13}=\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}$, $\sqrt[6]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\alpha}=\alpha^{\frac16}\cdot\alpha^{\frac13}=\alpha^{\frac16+\frac13}=\alpha^{\frac16+\frac26}=\alpha^{\frac36}=\alpha^{\frac12}=\sqrt{\alpha}$,

ενώ για τις πράξεις με νιοστές ρίζες έχουμε $\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{3}=3^{\frac16}\cdot3^{\frac13}\cdot3^{\frac12}=3^{\frac16+\frac13+\frac12}=3^{\frac{1+2+3}{6}}=3^{\frac66}=3^1=3$.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο και παρακολουθείστε το video "ΡΙΖΕΣ-ΔΥΝΑΜΕΙΣ, ΠΟΡΕΙΑ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗΣ"

Δραστηριότητα

Να γράψετε με μορφή δύναμης τα παρακάτω ζεύγη ριζικών για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς x και y:

$\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^6}$ και $\sqrt[3]{x^7}$, $\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}$ και $\sqrt[4]{\frac{1}{x^2}}$, $\sqrt[5]{x^2}$ και $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2$, $\sqrt[8]{x^8\cdot y}$ και $x\sqrt[8]{y}$

- $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^6}=x^{\frac13}\cdot x^{\frac63}=x^{\frac13+\frac63}=x^{\frac73}$, $\sqrt[3]{x^7}=x^{\frac73}$
- $\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{x^{\frac14}}{x^{\frac34}}=x^{\frac14-\frac34}=x^{-\frac24}=x^{-\frac12}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{x^2}}=\sqrt[4]{x^{-2}}=x^{-\frac24}=x^{-\frac12}$
- $\sqrt[5]{x^2}=x^{\frac25}$, $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2=\left(x^{\frac15}\right)^2=x^{\frac25}$
- $\sqrt[8]{x^8\cdot y}=\left(x^8\cdot y\right)^{\frac18}=\left(x^8\right)^{\frac18}\cdot y^{\frac18}=x^{8\cdot\frac18}\cdot y^{\frac18}=x\cdot y^{\frac18}$, $x\cdot\sqrt[8]{y}=x\cdot y^{\frac18}$

Με τη βοήθεια του καθηγητή σας, προσέξτε κάθε ζευγάρι χωριστά στις παραπάνω περιπτώσεις και διαπιστώστε ότι επαληθεύονται οι ιδιότητες των νιοστών ριζών που αναφέραμε στη σελίδα 33.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο "ΚΥΒΙΚΗ ΡΙΖΑ"

Ασκήσεις κατανόησης

Α. Με απάντηση:

1) Είναι τα εξαγόμενα των πράξεων ρητοί αριθμοί;

α) $\dfrac{2^{2^{\frac{3}{2}}}}{2^{2^{\frac{1}{2}}}}$, **β)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \div \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{5}{2}}$, **γ)** $5^{-\frac{2}{3}} \cdot 5^{-\frac{1}{3}}$, **δ)** $\left((0{,}5)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-6}$, **ε)** $\left(3^0\right)^{\frac{1}{7}}$

Απάντηση

Ναι, διότι:

α) $\dfrac{2^{2^{\frac{3}{2}}}}{2^{2^{\frac{1}{2}}}} = 2^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$, **β)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \div \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{5}{2}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{6}{2}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$,

γ) $5^{-\frac{2}{3}} \cdot 5^{-\frac{1}{3}} = 5^{\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)} = 5^{-\frac{3}{3}} = 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$, **δ)** $\left((0{,}5)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-6} = (0{,}5)^{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-6)} = (0{,}5)^3 = 0{,}125$,

ε) $\left(\varepsilon^0\right) = 3^0 = 1$

2) Να χαρακτηρίσετε Αληθείς (Α) ή Ψευδείς (Ψ) τους παρακάτω ισχυρισμούς:

i) $\sqrt[4]{(-16)^4} = -16$ **ii)** $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} = 2-\sqrt{5}$ **iii)** $\sqrt[4]{\sqrt{2^6}} = \sqrt[4]{2^3}$

iv) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = 5^{\frac{1}{6}}$ **v)** Οι αριθμοί $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ και $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ είναι αντίστροφοι

Απάντηση

i) Ψ, **ii)** Α, **iii)** Α, **iv)** Α, **v)** Α

Β. Για εξάσκηση:

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Στις παρακάτω εφαρμογές θα δούμε ότι οι νιοστές ρίζες των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών είναι αριθμοί για τους οποίους ισχύουν όλες οι ιδιότητες των πράξεων και οι σχέσεις του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Επίσης, με τη γραφή τους ως δυνάμεις με ρητό εκθέτη υπολογίζουμε, απλοποιούμε και χειριζόμαστε αριθμητικές και αλγεβρικές παραστάσεις.

Λυμενες Εφαρμογες

Εφαρμογη 1

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\sqrt[3]{\alpha^6}$ **, όπου α οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός,** **ii)** $\sqrt[5]{1024\cdot\alpha^{15}}$ **,** $\alpha \geq 0$ **,**

iii) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{\alpha^{16}}}$ **,** $\alpha \neq 0$ **,** **iv)** $\sqrt[4]{81\cdot\alpha^4\cdot\beta^8}$ **, όπου α, β οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί.**

Λυση

i) $\sqrt[3]{\alpha^6} = \sqrt[3]{(\alpha^2)^3} = \alpha^2$ ή $\sqrt[3]{\alpha^6} = \sqrt[3]{|\alpha|^6} = |\alpha|^{\frac{3}{6}} = |\alpha|^2 = \alpha^2$ **ii)** $\sqrt[5]{1024\cdot\alpha^{15}} = \sqrt[5]{4^5\cdot\left(\alpha^3\right)^5} = \sqrt[5]{\left(4\cdot\alpha^3\right)^5} = 4\alpha^3$

iii) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{\alpha^{16}}}=\sqrt[4]{\dfrac{3^4}{\left(\alpha^4\right)^4}}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{3}{\alpha^4}\right)^4}=\dfrac{3}{\alpha^4}$,

iv) $\sqrt[4]{81\cdot\alpha^4\cdot\beta^8}=\sqrt[4]{3^4\cdot\alpha^4\cdot(\beta^2)^4}=\sqrt[4]{(3\alpha\beta^2)^4}=\left|3\alpha\beta^2\right|=3\cdot|\alpha|\cdot\beta^2$

Εφαρμογη 2

Δίνονται οι παραστάσεις: α) $\sqrt[3]{(2x-1)^3}$ **, β)** $\sqrt[4]{(3x-2)^4}$ **, γ)** $\left(\sqrt[5]{3-5x}\right)^5$

i) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζονται.

ii) Για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται να απλοποιηθούν.

Λυση

i) α) Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει και αρκεί: $(2x-1)^3\geq 0$ που σημαίνει $2x-1\geq 0$, δηλαδή $x\geq\dfrac{1}{2}$.

β) Η παράσταση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό x.

γ) Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει και αρκεί: $3-5x\geq 0$ δηλαδή $x\leq\dfrac{3}{5}$.

ii) α) Για κάθε $x\geq\dfrac{1}{2}$, έχουμε: $\sqrt[3]{(2x-1)^3}=2x-1$

β) Για κάθε πραγματικό αριθμό x έχουμε: $\sqrt[4]{(3x-2)^4}=|3x-2|=\begin{cases}-3x+2 & ,\text{αν } x<\dfrac{2}{3}\\ 3x-2 & ,\text{αν } x\geq\dfrac{2}{3}\end{cases}$.

γ) Για κάθε $x\leq\dfrac{3}{5}$ έχουμε: $\left(\sqrt[5]{3-5x}\right)^5=3-5x$.

Εφαρμογη 3

i) Να δείξετε ότι $3<\sqrt[3]{30}<4$ και ii) να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$.

Λυση

i) Αρκεί $3^3<\left(\sqrt[3]{30}\right)^3<4^3$ ή $27<30<64$, η οποία είναι αληθής.

ii) Για να συγκρίνουμε τους δύο αριθμούς, εξετάζουμε το πρόσημο της διαφοράς τους:

$\sqrt[3]{30}-\left(6-\sqrt[3]{30}\right)=2\cdot\left(\sqrt[3]{30}-3\right)>0$, σύμφωνα με το ερώτημα i). Συνεπώς $\sqrt[3]{30}>6-\sqrt[3]{30}$.

Εφαρμογη 4

Να αποδείξετε ότι:

$A=\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{24}=6$, $B=\sqrt[5]{\alpha^2}\cdot\sqrt[15]{\alpha^4}=\sqrt[3]{\alpha^2}$, $\alpha>0$ και $\Gamma=\dfrac{\sqrt[12]{\alpha^5}}{\sqrt[4]{\alpha}}=\sqrt[6]{\alpha}$, $\alpha>0$

Λυση

$$A=\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{24}=6^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{3}}\cdot24^{\frac{1}{6}}=(2\cdot3)^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{3}}\cdot\left(2^3\cdot3\right)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2^1\cdot3^1=6$$

$$B=\sqrt[5]{\alpha^2}\cdot\sqrt[15]{\alpha^4}=\alpha^{\frac{2}{5}}\cdot\alpha^{\frac{4}{15}}=\alpha^{\frac{2}{5}+\frac{4}{15}}=\alpha^{\frac{6+4}{15}}=\alpha^{\frac{10}{15}}=\alpha^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\alpha^2}$$

$$\Gamma=\frac{\sqrt[12]{\alpha^5}}{\sqrt[4]{\alpha}}=\frac{\alpha^{\frac{5}{12}}}{\alpha^{\frac{1}{4}}}=\alpha^{\frac{5}{12}-\frac{1}{4}}=\alpha^{\frac{5}{12}-\frac{3}{12}}=\alpha^{\frac{2}{12}}=\alpha^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{\alpha}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $x, y, \alpha, \beta > 0$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}$, β) $\dfrac{5^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y}{5^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{3}{4}}}$, γ) $(\alpha\beta)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\alpha^{-1} \cdot \beta^{-1})^{\frac{1}{2}}$

ΛΥΣΗ

α) $\alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\alpha \cdot \dfrac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} = 1^{\frac{1}{3}} = 1$

β) $\dfrac{5^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y}{5^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{3}{4}}} = 5^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} \cdot y^{1-\frac{3}{4}} = 5^{\frac{2}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}} = 5 \cdot (x \cdot y)^{\frac{1}{4}}$,

γ) $(\alpha\beta)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\alpha^{-1} \cdot \beta^{-1})^{\frac{1}{2}} = (\alpha\beta)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} = (\alpha\beta)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\alpha \cdot \beta)^{-\frac{1}{2}} = \left((\alpha\beta)^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = (\alpha\beta)^{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2} = (\alpha\beta)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\beta}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

Με τη χρήση υπολογιστή τσέπης να υπολογίσετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{100}$, $\sqrt[25]{6394}$, $\sqrt[3]{7^5}$ με προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων.

ΛΥΣΗ

α) $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$: $\boxed{2}\boxed{x^y}\boxed{(}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{3}\boxed{)}\boxed{=}\boxed{1{,}25992105}$. Άρα $\sqrt[3]{2} \simeq 1{,}23$.

β) $\sqrt[4]{100} = 100^{\frac{1}{4}}$: $\boxed{100}\boxed{x^y}\boxed{(}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{4}\boxed{)}\boxed{=}\boxed{3{,}16227766}$. Άρα $\sqrt[4]{100} \simeq 3{,}16$.

γ) $\sqrt[25]{6394} = 6394^{\frac{1}{25}}$: $\boxed{6394}\boxed{x^y}\boxed{(}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{25}\boxed{)}\boxed{=}\boxed{1{,}419881221}$. Άρα $\sqrt[25]{6394} \simeq 1{,}42$.

δ) $\sqrt[3]{7^5} = 7^{\frac{5}{3}}$: $\boxed{7}\boxed{x^y}\boxed{(}\boxed{5}\boxed{\div}\boxed{3}\boxed{)}\boxed{=}\boxed{25{,}61514}$. Άρα $\sqrt[3]{7^5} \simeq 25{,}62$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 7

Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

i) $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$, ii) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{6^2}}$, iii) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$, iv) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

ΛΥΣΗ

i) $\dfrac{2}{\sqrt{10}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10^2}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{10}}{10} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

ii) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{6^2}}=\dfrac{4\cdot\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{6^2}\cdot\sqrt[3]{6}}=\dfrac{4\cdot\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{6^3}}=\dfrac{4\cdot\sqrt[3]{6}}{6}=\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{6}}{3}$

iii) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

iv) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: ***ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8*** *(Πρόβλημα διερευνητικής μάθησης/ μοντελοποίησης)*

Ασκήσεις – Προβλήματα

1) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$\sqrt{20^2}$, $\sqrt{(-30)^2}$, $\sqrt{(3-\pi)^2}$, $\sqrt{(\pi-3)^2}$, $\sqrt{(\alpha-\beta)^2}$, $\sqrt{x^2+6x+9}$

2) **Α)** Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι διαφορετικός από τους άλλους;

α) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{2}{\sqrt{12}}$

β) $3\sqrt{8}$, $\sqrt{72}$, $2\sqrt{18}$, $6\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}\sqrt{6}$

Β) Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ίσοι;

α) $\sqrt{8}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $2\sqrt{2}$, $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

β) $\sqrt{3}+\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{3+3}$, $\sqrt{27}-\sqrt{3}$

3) Χρησιμοποιώντας τις δυνάμεις με ρητό εκθέτη, να απλοποιήσετε τα ριζικά:

i) $\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{5^6}\cdot\sqrt[6]{40}$ **ii)** $\sqrt{\sqrt[4]{16}}$, **iii)** $\sqrt{3\cdot\sqrt[4]{3\cdot\sqrt[5]{3}}}$, **iv)** $\sqrt[12]{4^5}\cdot\sqrt[12]{4^7}$, **v)** $\dfrac{\sqrt[3]{5^{16}}}{\sqrt[3]{5^4}}$

4) Να υπολογισθεί η τιμή των παραστάσεων:

$A=3\sqrt{20}-4\sqrt{45}+3\sqrt{80}-2\sqrt{125}$ $B=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}$ $\Gamma=\sqrt[5]{3\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3}}}$

$\Delta=\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}$ $E=\dfrac{\sqrt{121}+\sqrt[3]{125}-\sqrt[4]{81}}{\sqrt{144}+\sqrt[3]{27}-\sqrt[6]{64}}$ $Z=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}}$

5) Αν $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$ και $\beta=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\left[\alpha^{-\frac{3}{2}}\cdot\beta\cdot\left(\alpha\beta^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\alpha^{-1}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]^3$$

6) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $3+\sqrt{5}$ και $\sqrt{13+6\sqrt{5}}$, **β)** $\sqrt[3]{12}$ και $\sqrt{5}$, **γ)** $1-\sqrt[3]{2}$ και $2-\sqrt[3]{3}$

7) **Α)** Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμά τους με ρητό παρανομαστή:

α) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$, **β)** $\dfrac{2}{\sqrt[5]{64}}$, **γ)** $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$, **δ)** $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

Β) Να αποδείξετε ότι $\sqrt[4]{\dfrac{16}{\left(1-\sqrt{3}\right)^4}}=\sqrt{3}+1$.

8) Να αποδείξετε ότι: i) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{6-\sqrt{20}}\cdot\sqrt[3]{6+\sqrt{20}}=4$, ii) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[3]{4-\sqrt{7}}=3$.

9) **α)** Να βρείτε τους αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει $\sqrt{4x-8}+\sqrt[3]{x+2y+4}=0$.

β) Για τις τιμές των x, y , του ερωτήματος Α, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$M=\sqrt[3]{3\cdot\left(2\sqrt{10}+7\right)\cdot\left(\sqrt{x-y}-\sqrt{x}\right)^2}$.

10) Αν α > 1, να διατάξετε από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις τιμές:

$$\frac{1}{\alpha},\quad \alpha^{\frac{1}{2}},\quad \frac{\alpha}{\sqrt[3]{\alpha^2}},\quad \sqrt[4]{\alpha},\quad \sqrt[6]{\alpha},\quad \alpha$$

11) **α)** Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα $\left(\sqrt{2}+1\right)^2$ και $\left(\sqrt{2}-1\right)^2$.

β) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=2$.

12) **α)** Να υπολογιστούν τα αναπτύγματα: $\left(\sqrt{2}+1\right)^3$ και $\left(\sqrt{2}-1\right)^3$.

β) Να αποδείξετε ότι: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$.

13) Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $\alpha=\left(\sqrt{3}\right)^8, \beta=\left(\sqrt[4]{5}\right)^8, \gamma=\left(\sqrt[8]{8}\right)^8$.

α) Να δείξετε ότι: $\alpha+\beta+\gamma=114$.

β) Να διατάξετε τα α, β, γ από το μεγαλύτερο στο μικρότερο και να δείξετε ότι: $|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|-|\alpha-\gamma|=0$

14) Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$, $B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$, $\Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6$.

α) Να δείξετε ότι Α + Β + Γ = 23.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

15) Αν $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$:

α) Να δείξετε ότι Α – Β = 4.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$.

16) Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{5-x}-\sqrt[6]{x^6}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του για τις οποίες ορίζεται η παράσταση.

β) Αν $x=-1$ να αποδείξετε ότι: $A^4+A^3+A^2+A+1=1$.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο προκειμένου να απαντήσετε στο σύντομο test που προτείνεται.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

- **Οι πραγματικοί αριθμοί περιλαμβάνουν:** φυσικούς, ακέραιους, ρητούς και άρρητους αριθμούς. Οι ρητοί αριθμοί λαμβάνουν κλασματική μορφή (με όρους ακέραιους αριθμούς), ενώ οι άρρητοι έχουν μη περιοδική και μη πεπερασμένη δεκαδική παράσταση. Οι φυσικοί και οι ακέραιοι αριθμοί έχουν διαδοχικότητα, δηλαδή κάθε αριθμός έχει επόμενο. Οι ρητοί και οι άρρητοι δεν έχουν διαδοχικότητα, όμως είναι πυκνά σύνολα, δηλαδή για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β με α < β υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός ρ τέτοιος ώστε α < ρ < β, αλλά και άρρητος αριθμός x τέτοιος, ώστε α < x < β.
- **Η απόσταση ενός σημείου Α,** στο οποίο αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός α από την αρχή Ο της αριθμογραμμής ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του πραγματικού αριθμού α και συμβολίζεται με $|\alpha|$ έχουμε
$$|\alpha| = \begin{cases} -\alpha\,,\ \alpha < 0 \\ \ \ \alpha\,,\ \alpha \geq 0 \end{cases}$$
- Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$|x| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$ $\quad |x| \geq x$ και $|x| \geq -x$ $\quad -|x| \leq x \leq |x|$ $\quad |x| = |-x| \geq 0$ $\quad |x|^2 = x^2$

Αν $|x| + |y| = 0$, τότε $x = y = 0$ και αντιστρόφως.

Αν $|x| + |y| \neq 0$, τότε ένας τουλάχιστον εκ των x, y είναι διάφορος του μηδενός.

Αν $|x| = \theta$ με θ > 0, τότε $x = \theta$ $\ x = -\theta$ και αντιστρόφως.

Αν $|x| = |y|$, τότε $x = y$ ή $x = -y$ και αντιστρόφως.

- **Απόσταση δύο αριθμών α και β** στην αριθμογραμμή ονομάζεται ο μη αρνητικός αριθμός $|\alpha - \beta|$ ή $|\beta - \alpha|$. Αν Α το σημείο στο οποίο απεικονίζεται ο αριθμός α και Β το σημείο στο οποίο απεικονίζεται ο αριθμός β στην αριθμογραμμή, τότε η απόσταση των αριθμών α και β ισούται με το μήκος του τμήματος ΑΒ.

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Αλγεβρική μορφή
$\lvert x\rvert = \rho$	$d(x,0) = \rho$	$x = \rho$ ή $x = -\rho$
$\lvert x - x_0\rvert = \rho$	$d(x,x_0) = \rho$	$x = x_0 + \rho$ ή $x = x_0 - \rho$
$\lvert x\rvert < \rho$	$d(x,0) < \rho$	$-\rho < x < \rho$
$\lvert x - x_0\rvert < \rho$	$d(x,x_0) < \rho$	$x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$
$\lvert x\rvert > \rho$	$d(x,0) > \rho$	$x < -\rho$ ή $x > \rho$
$\lvert x - x_0\rvert > \rho$	$d(x,x_0) > \rho$	$x < x_0 - \rho$ ή $x > x_0 + \rho$

- Για $\alpha \geq 0 : \sqrt[\nu]{\alpha} \geq 0$, $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$, $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$, για $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$, για $\alpha > 0$ και μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, ενώ αν μ,ν θετικοί ακέραιοι $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$.
- Για $\alpha, \beta \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος: $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$, $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, $\beta \neq 0$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΥΤΟΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Να λύσετε το ακόλουθο κριτήριο αξιολόγησης σε 80΄

ΘΕΜΑ Α

Α. Να χαρακτηρίσετε ως Αληθής ή Ψευδής καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

1) Ο αριθμός $\frac{4}{5}+1{,}333...$ είναι άρρητος.

2) Μεταξύ των $\frac{3}{8}$ και $\frac{5}{8}$ υπάρχει μόνο ένας πραγματικός αριθμός.

3) Ισχύει ότι: $d(x,-3)=|x+3|$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

4) Ισχύει ότι $|x-y|=|y-x|$, για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y.

5) Ισχύει ότι $|x+y|\le|x|-|y|$ για οποιουσδήποτε x, y πραγματικούς.

6) Ισχύει ότι:

$$\frac{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}}{\beta}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}},\quad \text{όπου } \alpha\ge 0,\ \beta>0$$

7) Η παράσταση $\sqrt{-x}$ δεν έχει νόημα για καμία πραγματική τιμή του x.

8) Ισχύει ότι $\sqrt[12]{4}=\sqrt[6]{2}$.

Β. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

1) Το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης $|x-2|\le 3$ είναι το διάστημα ....

2) Το σύνολο των αριθμών x που ικανοποιούν τη σχέση $d(x,-4)<4$ είναι το διάστημα........... ....

3) Η ανίσωση $x\le 2$ ή $x\ge 6$ γράφεται ισοδύναμα μέσω της απόλυτης τιμής ως εξής: .... ενώ μέσω της έννοιας της απόστασης, ως εξής ....

4) Αν $x<y<\omega$ τότε $|\omega-y|+|y-x|-|x-\omega|=...$

5) $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}=$ .... με $x>0$.

6) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}}=$ ....

ΘΕΜΑ Β

Αν γνωρίζουμε ότι: $-3<x<-\frac{1}{2}$:

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A=\frac{-2\cdot\sqrt{x^2+6x+9}+6x}{\sqrt{4x^2+4x+1}+4}$$

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$B=\frac{12}{\sqrt[5]{\sqrt{244}-1}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{244}+1}}$$

γ) Αν $A=-2$ και $B=4$ να αποδείξετε ότι η παράσταση $\Gamma=|2x+A|-|2x-B|$ είναι ανεξάρτητη του x.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι αριθμοί $x=\sqrt{\sqrt{81}}$ και $y^5=32$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς x και y.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{|\sqrt{y}-x|}+\frac{1}{|\sqrt{y}+x|}=\frac{6}{7}$.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha=\sqrt[5]{y+\sqrt{x}-1}$ και $\beta=\sqrt[10]{2+2\sqrt{x}+y}$.

δ) Να βρείτε τον αντίστροφο του αριθμού: $\gamma=\sqrt{x}+\sqrt[6]{2y^5}$ και να τον γράψετε ως κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΣΤΑΥΡΟΛΕΞΟ"

Κεφάλαιο 2ο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

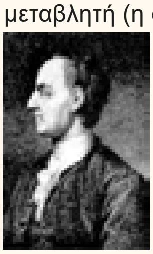
Λέξεις κλειδιά: *συναρτήσεις, γραφική παράσταση, γράφημα, κλίση ευθείας, τριγωνομετρία, τριγωνομετρικοί αριθμοί, τριγωνομετρικές ταυτότητες.*

Ιστορικό σημείωμα

Η έννοια της συνάρτησης είναι κεντρική στην επιστήμη των Μαθηματικών και τις εφαρμογές της και ανάγεται στη γενικότερη τάση του ανθρώπου να κάνει συσχετισμούς μεταξύ ποσοτήτων. Όμως, η πορεία που οδήγησε από τους απλούς συσχετισμούς στη σύγχρονη έννοια της συνάρτησης είναι περίπλοκη και τελικά μακρόχρονη.

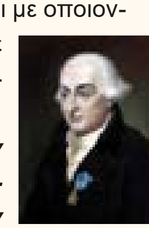
Η πρώτη -ιστορικά- φορά που ορίστηκε η έννοια της συνάρτησης ήταν από τον Johann Bernoulli το 1718: ***«Αυτό καλείται Συνάρτηση μιας μεγαλειώδους μεταβλητής, ως η ποσότητα που συντίθεται με οποιονδήποτε τρόπο από αυτή τη μεγαλειώδη μεταβλητή και από σταθερές».***

Στο ίδιο κείμενο ο Bernoulli χρησιμοποίησε το γράμμα **φ** για να χαρακτηρίσει μια συνάρτηση και για να δηλώσει ότι η μεταβλητή (η ανεξάρτητη) είναι το γράμμα **x**, έγραφε το συμβολισμό χωρίς παρένθεση **φx**.

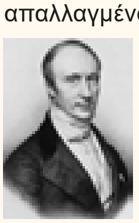


Ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον συμβολισμό f(x) είναι ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς στην ιστορία, ο Leonhard Euler. Ο Euler (1797), μαθητής του Bernoulli, εισάγει την έννοια της αναλυτικής έκφρασης:

«Μια συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση, που συντίθεται με οποιονδήποτε τρόπο από την ίδια ποσότητα και από νούμερα ή σταθερές ποσότητες. Έτσι, κάθε αναλυτική έκφραση όπου, πέρα από την μεταβλητή z, περιέχει επίσης τις σταθερές ποσότητες είναι μια συνάρτηση του z». Ακολουθεί ο ορισμός του Jean-Louis Lagrange (1797):



«Αυτό καλείται Συνάρτηση μίας ή περισσοτέρων ποσοτήτων, μια έκφραση υπολογισμού στην οποία οι ποσότητες εισέρχονται κατά οποιονδήποτε τρόπο, αναμεμιγμένες ή όχι με άλλες ποσότητες, που έχουμε ως προεπιλεγμένες και αμετάβλητες, ενώ οι ποσότητες της Συνάρτησης μπορούν να πάρουν όλες τις δυνατές τιμές». Έτσι, ο ορισμός του Lagrange, αν και μοιάζει με του Euler, είναι απαλλαγμένος από την έννοια της σταθεράς.



Ο Augustin-Louis Cauchy (1821) δίνει τον ακόλουθο ορισμό: ***«Όταν μεταβλητές ποσότητες συσχετίζονται μεταξύ τους κατά τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η τιμή της μιας εκ των μεταβλητών που δίνονται μπορεί να υπολογίσει τις τιμές όλων των άλλων μεταβλητών, τότε φυσιολογικά θεωρούμε αυτές οι μεταβλητές ποσότητες να εκφράζονται μέσα από αυτής ανάμεσά τους, που τότε παίρνει το όνομα ανεξάρτητη μεταβλητή. Οι άλλες ποσότητες που εκφράζονται μέσα από την ανεξάρτητη μεταβλητή λέγονται συναρτήσεις αυτής της μεταβλητής».***

Ο Lejeune Dirichlet δίνει το 1837 έναν ευρύ ορισμό για τη συνάρτηση, ο οποίος βρίσκεται πλέον με μικρές αλλαγές στα περισσότερα σχολικά βιβλία: ***«Αν μια μεταβλητή y είναι τόσο συσχετισμένη με μια μεταβλητή x κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε φορά που δίνεται μια αριθμητική τιμή στην x, να υπάρχει ένας κανόνας με τον οποίο να ορίζεται μία μόνο τιμή στην y, τότε λέμε ότι η μεταβλητή y θεωρείται συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x».***

Πηγές:

1. *Sierpinska A. (1992). On understanding the notion of function. The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, 25, 23-58.*
2. *Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1968). A history of mathematics. John Wiley & Sons.*
3. *Bradley, R. E., & Sandifer, C. E. (2009). Cauchy's Cours d'analyse. An Annotated Translation Springer Science Business Media, LLC.*

2.1
Ο ορισμός της συνάρτησης – Αναπαραστάσεις συνάρτησης

Τι καινούργιο υπάρχει στην παράγραφο

Με την ύλη της παραγράφου αυτής θα μάθουμε:

1) να αναγνωρίζουμε συναρτήσεις μέσα από καταστάσεις συμμεταβολής της καθημερινής ζωής και να τις διακρίνουμε από άλλες σχέσεις συμμεταβολής,

2) να χρησιμοποιούμε τον ορισμό της συνάρτησης, για να εξετάζουμε αν μια σχέση ή αντιστοιχία είναι συνάρτηση ή όχι,

3) να συνδέουμε διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση),

4) να ερμηνεύουμε μια δεδομένη γραφική παράσταση, για να επιλύουμε ένα πρόβλημα.

Απαραίτητες γνώσεις

1. Στο Γυμνάσιο μάθαμε ότι μια ισότητα που περιέχει δύο μεταβλητές x, y και καθορίζει μια σχέση μεταξύ των τιμών τους ονομάζεται συνάρτηση, όταν **σε κάθε τιμή του x** (x ανεξάρτητη μεταβλητή) αντιστοιχείται **μια μόνο** τιμή του y (y εξαρτημένη μεταβλητή).

2. Την αντιστοιχία των τιμών μεταξύ των μεταβλητών x και y μιας συνάρτησης την εμφανίσαμε και με διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών (x, y), που αποτελούν το **γράφημα** της συνάρτησης.

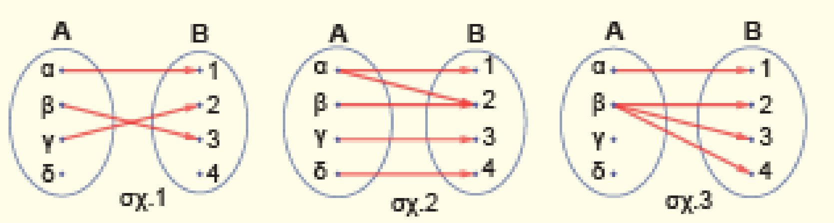
3. Για να δείξουμε την αντιστοιχία των τιμών, χρησιμοποιήσαμε, επίσης, έναν **πίνακα αντιστοίχων τιμών**, όπου, καθώς δίναμε τιμές στην ανεξάρτητη μεταβλητή x, παίρναμε μέσω της συνάρτησης τις αντίστοιχες τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής y.

4. Η απεικόνιση των σημείων του γραφήματος σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δημιουργεί τη **γραφική παράσταση** της συνάρτησης.

Εισαγωγική δραστηριότητα

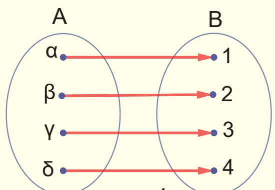
Σε ένα χωριό στην ορεινή Αρκαδία ζουν τέσσερις οικογένειες, α, β, γ, δ. Όταν πλησίασε απειλητικά μια πυρκαγιά στην περιοχή έλαβαν εντολή από την Πυροσβεστική Υπηρεσία (Π.Υ.) να εκκενώσουν το χωριό και να φιλοξενηθούν στα τέσσερα γειτονικά χωριά: 1, 2, 3, 4. Σε κάθε γειτονικό χωριό, υπάρχουν διαθέσιμα τουλάχιστον τέσσερα καταλύματα για τις οικογένειες αυτές.

Α) Εξ΄αιτίας του πανικού που αρχικά επικράτησε δόθηκαν με τα παρακάτω βελοδιαγράμματα μερικά σενάρια μετακίνησης των οικογενειών προς τα γειτονικά χωριά

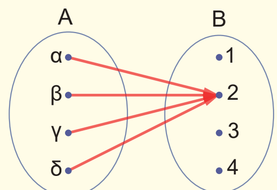


Εξηγείστε γιατί δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν

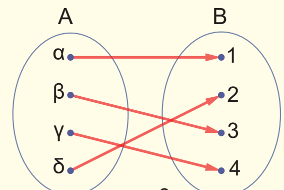
Β) Από το συντονιστικό της Π.Υ. δόθηκαν με τα παρακάτω βελοδιαγράμματα εφικτά σενάρια μετακίνησης των οικογενειών.



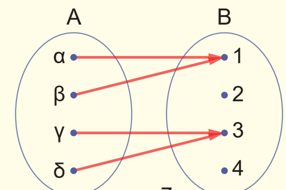
σχ.4



σχ.5



σχ.6



σχ.7

Συζητείστε με τον καθηγητή σας τις διαφορές που έχουν τα βελοδιαγράμματα των ερωτημάτων Α) και Β) και διατυπώστε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί μια αντιστοιχίση μεταξύ του συνόλου των οικογενειών και του συνόλου των χωριών ώστε το σενάριο της μετακίνησης να είναι εφικτό.

Γ) Αν ονομάσουμε **«συνάρτηση»** κάθε μία από τις αντιστοιχίες που εκφράζουν εφικτά σενάρια μετακίνησης, όπως αυτά του ερωτήματος Β) μπορείτε να σχεδιάσετε και άλλα παρόμοια;

Οικογένειες	α	β	γ	δ
χωριά	1	1	3	3

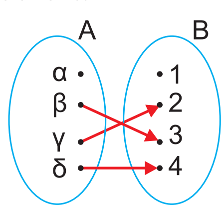
Δ) Το Υπουργείο Πολιτικής Προστασίας ζήτησε από την Π.Υ. να στείλει εφικτά σενάρια μετακίνησης με τη μορφή πίνακα αντιστοίχων τιμών όπως ο ακόλουθος που αντιστοιχεί στο σενάριο του σχήματος 7. Σχεδιάστε αντίστοιχους πίνακες για τα σενάρια των σχημάτων 4. 5 και 6 καθώς και όσων αντιστοιχούν στις συναρτήσεις που φτιάξατε στο ερώτημα Γ.

Ας δούμε τι έχει προκύψει

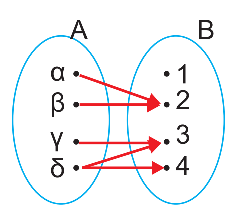
Η έννοια της συνάρτησης

Θεωρούμε τα σύνολα Α = {α, β, γ, δ} και Β = {1, 2, 3, 4}.

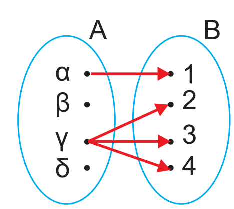
Α) Στα παρακάτω βελοδιαγράμματα παρουσιάζονται μερικές σχέσεις (αντιστοιχίες) μεταξύ των στοιχείων αυτών των συνόλων:



σχ.1



σχ.2

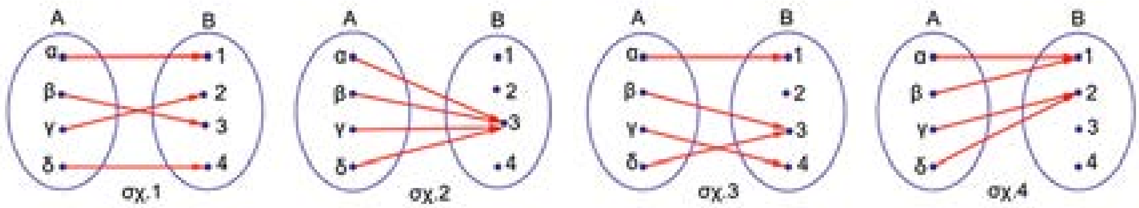


σχ.3

Σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης που δώσαμε στο Γυμνάσιο, καμία από τις σχέσεις που περιγράφονται στα παραπάνω βελοδιαγράμματα δεν είναι συνάρτηση, διότι:

- στο σχήμα 1 υπάρχει το στοιχείο α του συνόλου Α, που δεν αντιστοιχίζεται με κανένα στοιχείο του συνόλου Β,
- στο σχήμα 2 υπάρχει το στοιχείο δ που αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του συνόλου Β και
- στο σχήμα 3 υπάρχει αφενός μεν το στοιχείο γ, που αντιστοιχίζεται σε τρία στοιχεία του συνόλου Β, αφετέρου δε υπάρχουν τα στοιχεία β και δ του συνόλου Α, που δεν αντιστοιχίζονται σε κανένα στοιχείο του συνόλου Β.

Β) Ας δούμε τώρα τα παρακάτω βελοδιαγράμματα:

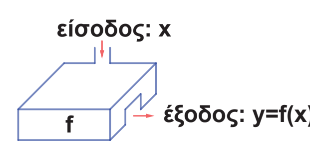


- στο σχήμα 1 κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε διαφορετικό στοιχείο του συνόλου Β,
- στο σχήμα 2 τα στοιχεία του συνόλου Α αντιστοιχίζονται στο στοιχείο 3 του συνόλου Β,
- στο σχήμα 3 κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο στοιχείο του συνόλου Β και
- στο σχήμα 4 τα στοιχεία του συνόλου Α αντιστοιχούνται ανά δύο στο ίδιο στοιχείο του συνόλου Β.

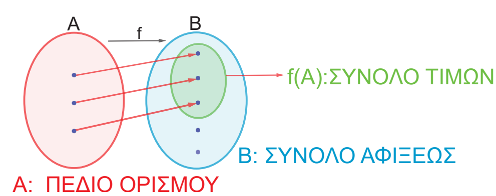
Σε όλες τις περιπτώσεις, **κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β**. Άρα, όλες οι σχέσεις που παριστάνονται με τα παραπάνω βελοδιαγράμματα είναι **συναρτήσεις**. Γενικά:

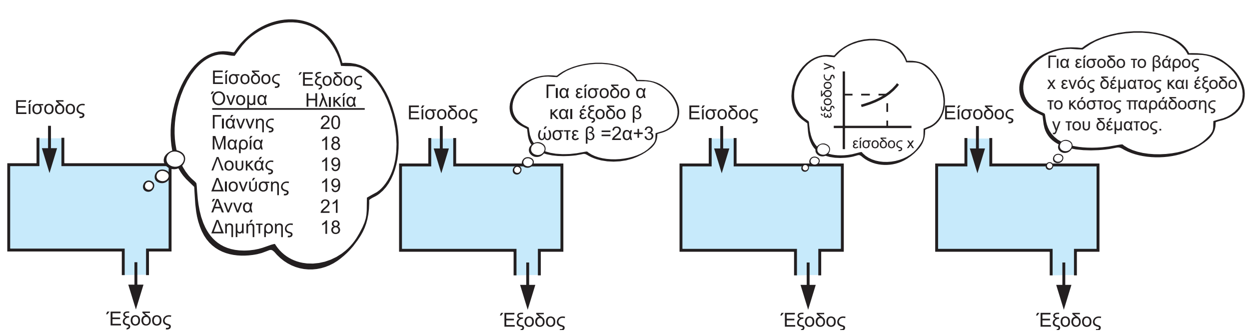
Συνάρτηση ονομάζουμε μια σχέση (αντιστοιχία) μεταξύ των στοιχείων δύο συνόλων Α και Β, αν κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

Μια συνάρτηση συμβολίζεται συνήθως με μικρά λατινικά ή ελληνικά γράμματα f, g, h, φ,… και συγκεκριμένα γράφουμε π.χ. $f: A \to B$.



Το σύνολο Α (ή D_f «Domain») λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f. Το στοιχείο y του συνόλου Β, στο οποίο αντιστοιχείται το x του συνόλου Α, λέγεται **τιμή (ή εικόνα)** της συνάρτησης f στο x και συμβολίζεται $y = f(x)$. Το σύνολο Β λέγεται **σύνολο αφίξεως** της συνάρτησης f. Το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία του συνόλου Β, που είναι τιμές των στοιχείων του Α, λέγεται **σύνολο τιμών** της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με $f(A)$ (ή R_f “Range”).

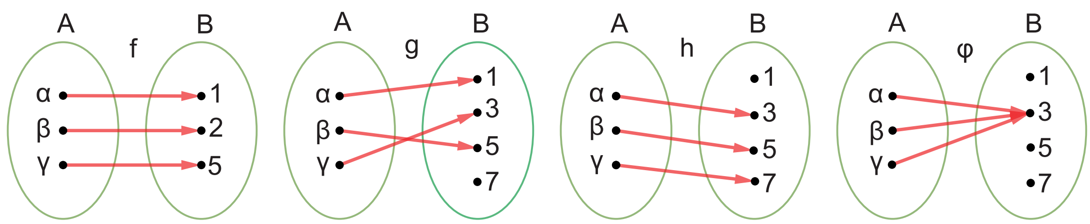




Για να είναι «καλώς ορισμένη« μια συνάρτηση αρκεί να είναι καλώς ορισμένα το πεδίο ορισμού της και το στοιχείο που αντιστοιχεί καθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις που αναπαρίστανται με τα παρακάτω βελοδιαγράμματα:



α) **Να γράψετε τα: ΠΕΔΙΑ ΟΡΙΣΜΟΥ Α, ΣΥΝΟΛΑ ΑΦΙΞΕΩΣ Β και ΣΥΝΟΛΑ ΤΙΜΩΝ.**

β) **Να βρείτε τις τιμές των συναρτήσεων για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού τους.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Για τη συνάρτηση f: $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $B=\{1,2,5\}$, $f(A)=\{1,2,5\}$.

Για τη συνάρτηση g: $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $B=\{1,3,5,7\}$, $g(A)=\{1,3,5\}$.

Για τη συνάρτηση h: $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $B=\{1,3,5,7\}$, $h(A)=\{3,5,7\}$.

Για τη **«σταθερή»** συνάρτηση φ: $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $B=\{1,3,5,7\}$, $\varphi(A)=\{3\}$.

β) Για $x=\alpha$: $f(\alpha)=1$, $g(\alpha)=1$, $h(\alpha)=3$, $\varphi(\alpha)=3$.

Για $x=\beta$: $f(\beta)=2$, $g(\beta)=5$, $h(\beta)=5$, $\varphi(\beta)=3$.

Για $x=\gamma$: $f(\gamma)=5$, $g(\gamma)=3$, $h(\gamma)=7$, $\varphi(\gamma)=3$.

Η έννοια της **συνάρτησης** αποτελεί ένα θεμελιώδες εργαλείο στα μαθηματικά, η αξία του οποίου επεκτείνεται πολύ πέρα από τον χώρο των καθαρά μαθηματικών προβλημάτων. Η ικανότητά της να περιγράφει σχέσεις εξάρτησης μεταξύ μεταβλητών την καθιστά αναντικατάστατη για τη **μοντελοποίηση προβλημάτων** σε ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών κλάδων.

Για παράδειγμα, στη Φυσική, για το διάστημα s που διανύει ένα κινητό και τον χρόνο t που χρειάζεται για να το διανύσει όταν η ταχύτητα v είναι σταθερή π.χ. 70 Km/h στην ευθύγραμμη κίνηση ισχύει: $s=70\cdot t$ δηλαδή $s(t)=70\cdot t$. Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι το διάστημα s εξαρτάται (συναρτάται) από τον χρόνο t.
Τη μεταβλητή t την ονομάζουμε **ανεξάρτητη μεταβλητή** και τη μεταβλητή s **εξαρτημένη μεταβλητή**.
Με τη βοήθεια της παραπάνω συνάρτησης του διαστήματος σε σχέση με το χρόνο μπορούμε να απαντήσουμε σε ερωτήματα όπως είναι:

- ✓ Μπορούμε να προβλέψουμε την απόσταση σε 6 ώρες; (Απάντηση: s(6)=420 km)
- ✓ Αν έχει διανύσει 350 km, πόσες ώρες οδηγούσε; (Απάντηση: $t=\frac{350}{70}=5$ h)

- Έστω μια συνάρτηση f μεταξύ των συνόλων A και B.
  - ✓ Αν το B έχει στοιχεία πραγματικούς αριθμούς τότε η f λέγεται **πραγματική συνάρτηση**.
  - ✓ Αν το A έχει στοιχεία πραγματικούς αριθμούς τότε η f λέγεται **συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής.**

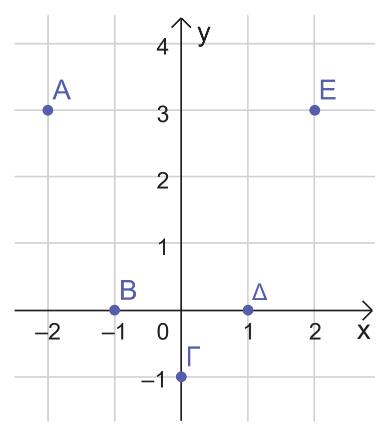
Στην περίπτωση αυτή η διαδικασία της αντιστοίχισης εκφράζεται με έναν **μαθηματικό τύπο** «$y=f(x)$» που διαβάζεται «f του x» και δηλώνει τη σχέση της μεταβλητής y με την μεταβλητή x. Η ανεξάρτητη μεταβλητή x της συνάρτησης δηλώνεται στον τύπο όταν γράφουμε $f(x)$ και η συνάρτηση το «αναγνωρίζει» ως μεταβλητή. Κάθε άλλο γράμμα στον τύπο της θεωρείται σταθερός αριθμός.
Οι τύποι $f(x)=x^2+1$, $g(s)=s^2+1$, $h(t)=t^2+1$, περιγράφουν την ίδια συνάρτηση, που σημαίνει ότι δεν έχει καμία σημασία το πιο γράμμα θα χρησιμοποιήσουμε.

✓ Το σύνολο A (**πεδίο ορισμού της f**) εξαρτάται από τον τύπο της συνάρτησης f και αν δεν αναφέρεται θα είναι το **σύνολο των πραγματικών αριθμών x έτσι, ώστε η τιμή της f στο x δηλαδή το y = f(x) να είναι πραγματικός αριθμός.**

Για παράδειγμα, τα πεδία ορισμού:

- της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ είναι το $A=\mathbb{R}-\{2,-2\}$ διότι πρέπει και αρκεί $x^2\neq 4$, που σημαίνει $x\neq 2$ και $x\neq -2$,
- της συνάρτησης $g(x)=\sqrt{x-3}$ είναι το διάστημα $[3,+\infty)$, γιατί πρέπει και αρκεί $x-3\geq 0$, δηλαδή $x\geq 3$,
- της συνάρτησης $h(x)=\dfrac{1}{x^2-1}+\sqrt{x}$ είναι οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί εκτός του 1, γιατί πρέπει και αρκεί $x^2-1\neq 0$ και $x\geq 0$, δηλαδή $x^2\neq 1$ και $x\geq 0$, επομένως $x\neq 1$ και $x\neq -1$ και $x\geq 0$.

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2-1$.

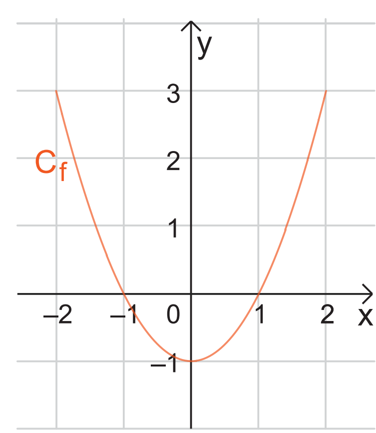


A) Αν το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ τότε:

- στον διπλανό πίνακα φαίνονται οι αντίστοιχες τιμές μεταξύ του x και του y:
- το σύνολο $\Gamma=\{(-2,3),(-1,0),(0,-1),(1,0),(2,3)\}$ λέγεται **γράφημα** της συνάρτησης f.
- Αν θεωρήσουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xOy και αναπαραστήσουμε τα σημεία:

  $A(-2,3),B(-1,0),\Gamma(0,-1),\Delta(1,0),E(2,3)$

  θα προκύψει το διπλανό σχήμα, που λέγεται **γραφική παράσταση** της συνάρτησης f.



B) Αν το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα των πραγματικών αριθμών $[-2,2]$, τότε το **γράφημα** της συνάρτησης θα αποτελείται από όλα τα ζεύγη της μορφής (x,y) με $-2\leq x\leq 2$ και $y=x^2-1$, ενώ η **γραφική παράσταση** φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

Γενικά:

- **γράφημα** μιας συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x,y) με $y=f(x)$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της f,
- **γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$ είναι η αναπαράσταση του **γραφήματος** σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ με $y=f(x)$ για κάθε x του συνόλου A και συμβολίζεται συνήθως με C_f.

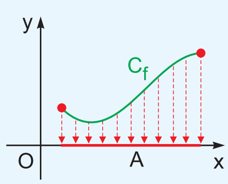
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

1. Στο γράφημα μιας συνάρτησης **δεν υπάρχουν** διαφορετικά ζεύγη με την ίδια τετμημένη.

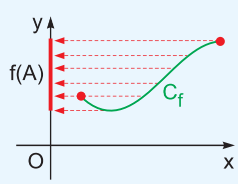
2. Οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y τέμνει τη C_f **το πολύ σε ένα σημείο** αφού σε διαφορετική περίπτωση θα υπάρχουν διαφορετικά σημεία της C_f με την ίδια τετμημένη.

3. Ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, αν και μόνο αν, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $y = f(x)$.

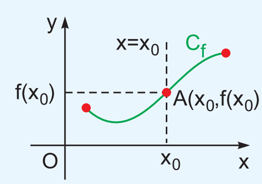
4. Από τη γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f παρατηρούμε:
- το πεδίο ορισμού της f, που είναι το σύνολο A των τετμημένων της C_f (σχ. α),
- το σύνολο τιμών της f που είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων της C_f (σχ. β),
- την τιμή της f για δεδομένο x_0 του πεδίου ορισμού της, που είναι η τεταγμένη $f(x_0)$ του σημείου της C_f, η οποία έχει τετμημένη x_0 (σχ. γ),
- τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης (αν υπάρχει) καθώς και την τιμή του x, για την οποία παίρνει τις τιμές αυτές (σχ. δ).



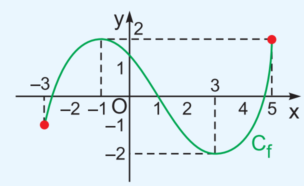
σχ. α



σχ. β



σχ. γ



σχ. δ

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ Π.Ο. ΚΑΙ Σ.Τ. ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ"

Δραστηριότητα

Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = 0,5 \cdot x^2 - x + 3$ και πεδίο ορισμού το διάστημα [–1,2].

A) Με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra ή οποιουδήποτε άλλου λογισμικού να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

1) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών της f;

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ – ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ"

2) Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Για ποιες τιμές του x παρουσιάζει η συνάρτηση f την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της;

B) Θεωρούμε την ευθεία ε: y = α με $2,5 \le \alpha \le 4,5$.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΠΛΗΘΟΣ ΛΥΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ f(x) = α, $2,5 \le \alpha \le 4,5$ "

Μετακινώντας τον δρομέα α απαντήστε στα εξής ερωτήματα:

1) Για ποιες τιμές του α η ευθεία ε τέμνει τη γραφική παράσταση σε δύο σημεία;

2) Βάλτε τον δρομέα στην τιμή α = 3 και βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης f(x) = 3.

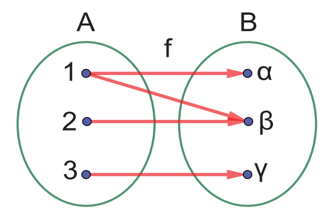
Ασκήσεις κατανόησης

Α. Με απάντηση:

1) Να κυκλώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

i) Για να γίνει η αντιστοιχία f συνάρτηση αρκεί να αφαιρεθεί το ζεύγος:

Α. $(1,\alpha)$ **Β.** $(\alpha,1)$ **Γ.** $(2,\beta)$ **Δ.** $(\beta,2)$ **Ε.** $(3,\gamma)$



ii) Αν για τη συνάρτηση $f(x)=2x^4-3x^2+\kappa$, όπου κ πραγματικός αριθμός, ισχύει $f(\sqrt{2})=6$, τότε το $f(-\sqrt{2})$ ισούται με:

Α. -1 **Β.** 0 **Γ.** 6 **Δ.** 5 **Ε.** $\sqrt{2}$

iii) Η συνάρτηση $f(x)=1-3x+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ έχει πεδίο ορισμού:

Α. $(1,+\infty)$ **Β.** $[1,+\infty)$ **Γ.** $(-\infty,\ 1)$ **Δ.** $\mathbb{R}$ **Ε.** $(-\infty,\ 1]$

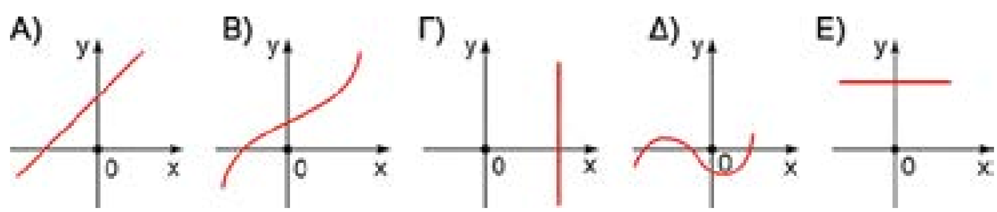
iv) Ο πίνακας τιμών αντιστοιχεί στη συνάρτηση:

Α. $y=x+3$ **Β.** $y=2x$ **Γ.** $y=x-1$

Δ. $y=x^2-3$ **Ε.** $y=-x-3$

x	–1	2	3	-2
y	–2	1	6	1

v) Από τα παρακάτω σχήματα **δεν** αντιστοιχεί σε γραφική παράσταση συνάρτησης το σχήμα:



Απάντηση

i) Α **ii)** Γ **iii)** Α **iv)** Δ **v)** Γ

2) Δίνεται η σχέση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μεταξύ των πραγματικών τιμών των μεταβλητών x και y που περιγράφεται από τη σχέση $y^2=8x$. Να εξεταστεί αν η σχέση αυτή είναι συνάρτηση.

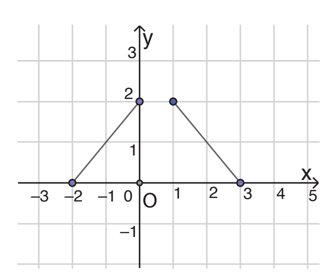
ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι για $x=2$, τότε $y^2=8\cdot 2$ δηλαδή $y^2=16$.

Άρα $y=\sqrt{16}$ ή $y=-\sqrt{16}$ δηλαδή $y=4$ ή $y=-4$.

Άρα ο αριθμός $x=2$ αντιστοιχεί σε δύο αριθμούς τους $y=4$ και $y=-4$. Άρα η σχέση g δεν είναι συνάρτηση.

3) Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.
Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.



ΛΥΣΗ

Α) Το πεδίο ορισμού της f είναι:

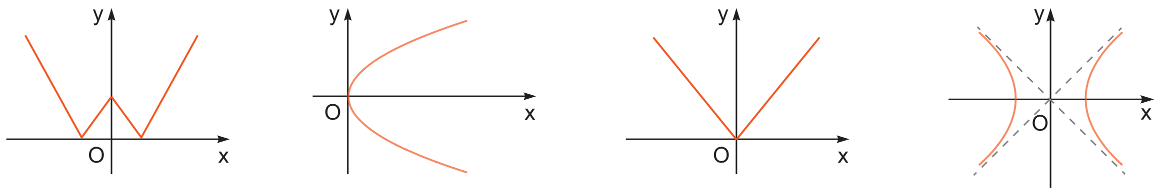
α) $[0,2]$ **β)** $[-2,3]$ **γ)** $[-2,0]\cup[1,3]$ **δ)** $(-2,0)\cup(1,3)$

Β) Το σύνολο τιμών της f

α) $[0,2]$ **β)** $(0,2]$ **γ)** $[-2,0]\cup[1,3]$ **δ)** $(-2,0)\cup(1,3)$

Β. Για εξάσκηση:

Δίνονται οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις τεσσάρων αντιστοιχιών.



Ποιες από αυτές είναι συναρτήσεις;

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να μελετήσετε τη λύση προβλήματος μέσω γραφικής παράστασης «κλαδικής» παράστασης.

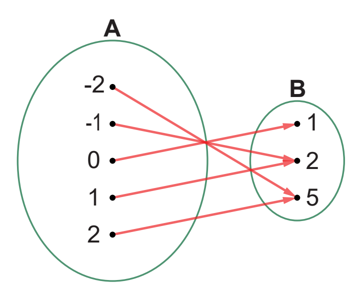
Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Χρησιμοποιώντας διάφορες αναπαραστάσεις (βελοδιάγραμμα, πίνακας τιμών, γράφημα, λεκτική διατύπωση, γραφικά) εξετάζουμε αν μια αντιστοιχία είναι συνάρτηση ή όχι, βρίσκουμε για μια συνάρτηση το πεδίο ορισμού της, διάφορες τιμές της, το σύνολο τιμών της κ.α. Επιπλέον, ερμηνεύοντας τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης επιλύουμε προβλήματα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνονται τα σύνολα: $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ και $B=\{1,2,5\}$. Στο διπλανό βελοδιάγραμμα φαίνεται η συνάρτηση μεταξύ των στοιχείων του συνόλου Α και του συνόλου Β. Μπορείτε να δώσετε τη συνάρτηση αυτή με όλους τους δυνατούς τρόπους που γνωρίζετε;



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1ος τρόπος: Με το βελοδιάγραμμα της εκφώνησης.

2ος τρόπος: Με πίνακα αντιστοίχων τιμών:

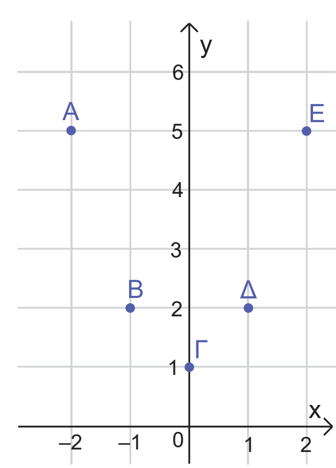
x	– 2	– 1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

3ος τρόπος: Με το γράφημα της συνάρτησης:

$$G=\{(-2,5),(-1,2),(0,1),(1,2),(2,5)\}.$$

4ος τρόπος: Λεκτικά (περιγραφικά): «Σε κάθε τιμή του συνόλου Α, αντιστοιχίζεται το τετράγωνό του αυξημένο κατά μία μονάδα».

5ος τρόπος: Με γραφική παράσταση, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Έστω η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=x^2-3x$.

i) **Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και οι τιμές της f για $x=1$, $x=\alpha$, $x=\alpha+\beta$.**

ii) **Να βρεθούν οι τιμές του x αν:**

α) $f(x)=0$, **β)** $f(x)=-2$.

ΛΥΣΗ

i) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, αφού για κάθε πραγματικό αριθμό x η τιμή $f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός.

Οπότε $f(1)=1^2-3\cdot 1=1-3=-2$, $f(\alpha)=\alpha^2-3\cdot\alpha$,

$f(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)^2-3\cdot(\alpha+\beta)=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-3\alpha-3\beta$.

ii) **α)** $f(x)=0$, δηλαδή $x(x-3)=0$, που σημαίνει $x=0$ ή $x-3=0$, οπότε $x=0$ ή $x=3$.

β) $f(x)=-2$, δηλαδή $x^2-3x=-2$, που σημαίνει $x^2-3x+2=0$, οπότε $x=1$ ή $x=2$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Έστω συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}3x^2-1 & , \quad x<-1\\ 2-3x & , \quad x\geq -1\end{cases}$. ***(Συνάρτηση με κλάδους: «κλαδική»).***

i) **Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και οι τιμές της f για $x=-2$, $x=0$, $x=2$.**

ii) **Να βρεθεί η τιμή του x, α) με $x<-1$ αν $f(x)=26$ και β) με $x\geq -1$ αν $f(x)=-25$.**

ΛΥΣΗ

i) Το πεδίο ορισμού είναι το όλο το $\mathbb{R}$, αφού η συνάρτηση ορίζεται και για $x<-1$ και για $x\geq -1$.

Οπότε: $f(-2)=3\cdot(-2)^2-1=12-1=11$, $f(0)=2-3\cdot 0=2$, $f(2)=2-3\cdot 2=-4$.

ii) **α)** $f(x)=26$, δηλαδή $3x^2-1=26$, που σημαίνει $3x^2=27$, οπότε $x^2=9$, επομένως $x=3$ ή $x=-3$. Όμως $x<-1$. Άρα $x=-3$

β) $f(x)=-25$ δηλαδή $2-3x=-25$, που σημαίνει $3x=27$. Άρα $x=9$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

α) **Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\kappa\in\mathbb{R}$, αν το σημείο με συντεταγμένες (1, 3) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x)=\kappa-x^2$.**

β) **Αν κ = 4, να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τους άξονες.**

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει και αρκεί οι συντεταγμένες του σημείου να επαληθεύουν την εξίσωση $y=\varphi(x)$, δηλαδή την εξίσωση, $y=\kappa-x^2$. Οπότε $3=\kappa-1^2$, επομένως κ = 4.

β) Για $\kappa=4$ ο τύπος της συνάρτησης γίνεται $\varphi(x)=4-x^2$.

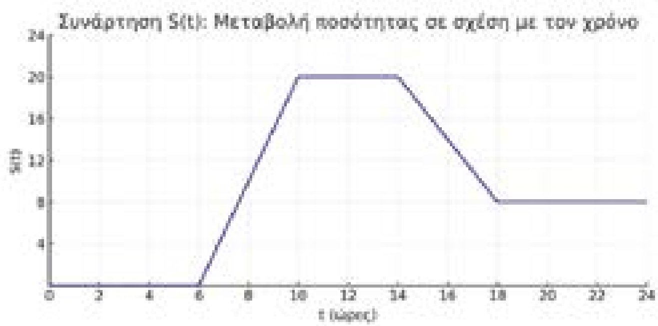
- **Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της φ τέμνει τον άξονα x΄x έχουν τεταγμένη μηδέν** και τετμημένη τις λύσεις της εξίσωσης $\varphi(x)=0$, δηλαδή της εξίσωσης $4-x^2=0$, οπότε $x^2=4$ που σημαίνει $x=2$ ή $x=-2$. Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι $A(2,0)$ και $B(-2,0)$.

- **Το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της φ τέμνει τον άξονα y΄y έχει τετμημένη μηδέν** και τεταγμένη $\varphi(0)=4$. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\Gamma(0,4)$.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: ***ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5*** *(Πρόβλημα διερευνητικής μάθησης/μοντελοποίησης)*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

Η συνάρτηση S(t) παριστάνει τη μεταβολή της ποσότητας νερού (σε μέτρα) σε μια δεξαμενή σε σχέση με τον χρόνο t (σε ώρες). Η γραφική παράσταση που ακολουθεί δείχνει την πορεία αυτής της μεταβολής μέσα σε ένα 24ωρο.



1) **Ποια είναι η τιμή της S(t) στις 6:00, 10:00 και 20:00;**
2) **Ποια χρονικά διαστήματα αντιστοιχούν σε αύξηση της ποσότητας;**
3) **Πότε η ποσότητα παραμένει σταθερή;**
4) **Ποια είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης και πότε συμβαίνει;**
5) **Υπάρχει χρονικό διάστημα με σταδιακή μείωση; Πότε;**

Λύση

1) S(6) = 0, S = (10) = 20, S(20) = 8.
2) Από τις 6.00 έως τις 10.00.
3) Από τις 00.00 έως τις 6.00, από τις 10.00 έως τις 14.00 και από τις 18.00 έως τις 24.00.
4) Η μέγιστη τιμή είναι 20 μέτρα και συμβαίνει το χρονικό διάστημα από τις 10.00 έως τις 14.00.
5) Ναι, είναι το διάστημα μεταξύ τις 14.00 και τις 18.00.

Ασκήσεις - Προβλήματα

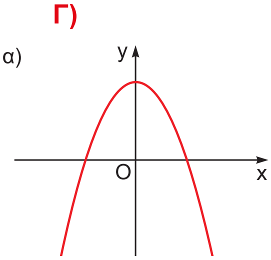
1) Ποιες από τις παρακάτω αντιστοιχίσεις περιγράφουν συναρτήσεις;

Α) α) $\Gamma_1=\{(1,3),(2,3),(3,1),(4,2)\}$, **β)** $\Gamma_2=\{(2,2),(3,1),(-1,2),(2,0)\}$

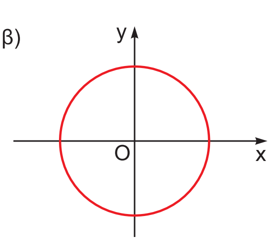
Β) α) $y=x^2-9$, **β)** $x+y=9$, **γ)** $x^2+y^2=9$, με x πραγματικό αριθμό
Επιβεβαιώστε την εικασία σας με τη χρήση λογισμικού όπως το GeoGebra.

Γ)

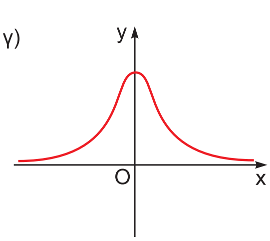
α)



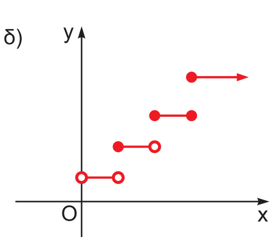
β)



γ)



δ)



2) Δίνεται το γράφημα μιας αντιστοιχίας φ: $G=\{(-2,3),(0,1),(1,2),(3,0),(4,1),(5,-1)\}$.
Να αναπαραστήσετε την αντιστοιχία:

A) **α)** με πίνακα τιμών,
β) με βελοδιάγραμμα,
γ) με γραφική παράσταση.

B) Είναι η αντιστοιχία αυτή συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

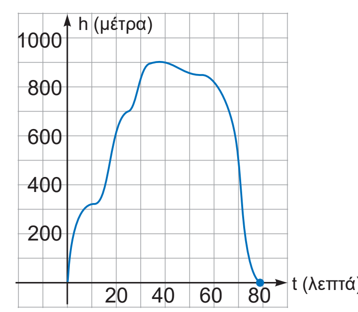
3) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{1}{x^4+1}$, **ii)** $g(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$, **iii)** $h(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$,

iv) $k(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{2-x}$, **v)** $m(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, **vi)** $p(x)=\sqrt{2-|x|}$,

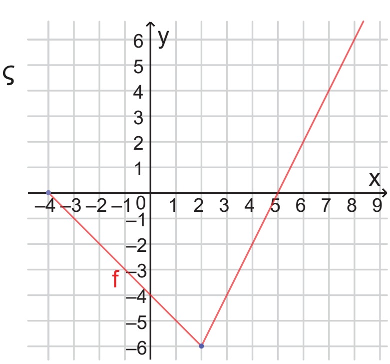
vii) $s(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } x>0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \\ -x^2, & \text{αν } x<0 \end{cases}$

4) Σε μια βόλτα με αερόστατο, η συνάρτηση H(t) δίνει το ύψος, σε μέτρα, μετά από χρόνο t λεπτών. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι το διπλανό σχήμα.



i) Βρείτε την τιμή H(30) και εξηγήστε τη σημασία της.
ii) Βρείτε την τιμή του t ώστε H(t) = 600. Ποιά η σημασία της;
iii) Να βρείτε τη χρονική διάρκειας της πτήσης του αερόστατου.
iv) Να βρείτε το εύρος του ύψους κατά τη διάρκεια καταγραφής της πτήσης του.

5) Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f:



i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης
ii) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	– 4	– 2	0			
y				2	4	6

iii) Να γράψετε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.
iv) Να βρείτε το διάστημα των τιμών του x για τις οποίες η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές.

6) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} -x^2, & \text{αν } -3\le x\le 0 \\ 3x-2, & \text{αν } x>0 \end{cases}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της,
β) τη τιμή της παράστασης $A=f(-2)+2026\cdot f(0)+f(2)+2026\cdot f(1)$,
γ) τις τιμές του x ώστε:

i) $f(x)=-1$, **ii)** $f(x)=19$

7) Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε την τιμή του $\kappa \in R$, ώστε το σημείο Μ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

i) $f(x)=2x^2+\kappa$, $M(2,\ 8)$, **ii)** $g(x)=\kappa\sqrt{x-1}$, $M(10,\ 6)$.

8) Βρείτε τα πεδία ορισμού καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις και στη συνέχεια τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων με τους άξονες:

i) $f(x)=1-2x$, **ii)** $g(x)=(x-3)^2$,

iii) $h(x)=\sqrt{x-1}$, **iv)** $k(x)=x\sqrt{x^2+9}$

9) Η αξία Α ενός φωτοαντιγραφικού μηχανήματος σε ευρώ, t χρόνια μετά από την αγορά του, δίνεται από τη σχέση $A(t)=9000-900\cdot t$.

i) Βρείτε την τιμή Α(4) και εξηγήστε ποια η σημασία της.

ii) Βρείτε την τιμή του t όταν Α(t) = 3600 και εξηγήστε ποια η σημασία της.

iii) Βρείτε την αρχική τιμή αγοράς του μηχανήματος.

10) Ο Γιώργος θέλει να φτιάξει έναν μικρό κήπο στην αυλή του σε σχήμα ορθογωνίου και να έχει περίμετρο 8 μέτρα. Συμβολίζουμε x και y τις διαστάσεις του κήπου.

i) Να βρείτε τη σχέση των διαστάσεων x και y και να γράψετε τους περιορισμούς που πρέπει να υπακούσουν.

ii) Να εκφράσετε με ένα μαθηματικό μοντέλο το εμβαδόν του κήπου σε συνάρτηση με τη διάσταση x.

iii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν δεν μπορεί να είναι περισσότερο από 16 τ.μ.

iv) Τι διαστάσεις θα έχει ο κήπος αν έχει το μεγαλύτερο δυνατόν εμβαδόν. Τι σχήμα θα έχει τότε ο κήπος;

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο προκειμένου να απαντήσετε στο σύντομο test που προτείνεται.

2.2

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot x+\beta$

Τι καινούργιο υπάρχει στην παράγραφο

Με την ύλη της παραγράφου αυτής:

1) θα ερμηνεύσουμε το ρόλο των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta$,
2) θα μάθουμε να αντλούμε από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής $f(x)=\alpha x+\beta$ πληροφορίες για τη συνάρτηση, όπως η κλίση της και η εξίσωσή της.

Απαραίτητες γνώσεις

Στο Γυμνάσιο μάθαμε:

1) Δύο ποσά x, y λέγονται ανάλογα, όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε πολλαπλασιάζονται και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού με τον ίδιο αριθμό. Η συνάρτηση που συνδέει δυο ανάλογα ποσά x και y έχει τύπο $y=f(x)=\alpha\cdot x$ και έχει γραφική παράσταση, σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων με εξίσωση $y=\alpha\cdot x$.
2) Η σταθερά αναλογίας α ονομάζεται **κλίση της ευθείας** και ορίζεται ως η μεταβολή $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, του y που αντιστοιχεί σε μοναδιαία αύξηση του x.
3) Η γραφική παράσταση της $y=\alpha\cdot x+\beta$, $\beta\neq 0$ είναι ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση $y=\alpha\cdot x$, που διέρχεται από το σημείο $(0,\ \beta)$ του άξονα y΄y. Ο συντελεστής α είναι επίσης η κλίση της ευθείας, ενώ ο συντελεστής β μετατοπίζει κατακόρυφα την ευθεία $y=\alpha\cdot x$ προς τα πάνω αν $\beta>0$ ή προς τα κάτω αν $\beta<0$.

Εισαγωγική δραστηριότητα

Σε ένα εργοτάξιο, ένα σκαπτικό μηχάνημα ανοίγει λάκκους και το κόστος εξαρτάται από τον όγκο χώματος που αφαιρείται. Ένας εργολάβος θέλει να προβλέψει πόσο θα του κοστίσει κάθε εργασία. Παρακάτω φαίνονται μερικά δεδομένα για τον όγκο του λάκκου (σε m^3) και το συνολικό κόστος (σε €).

Όγκος σε m^3	Κόστος σε €
20	200
50	500
100	1000
150	1500
200	2000
250	2500
300	3000
350	3500

Α) i) Ποια σχέση παρατηρείτε ανάμεσα στον όγκο και το κόστος;
ii) Πόσο κοστίζει κάθε $1m^3$ εκσκαφής;
iii) Πόσο θα κοστίσει η εκσκαφή $120\ m^3$;

Β) i) Αν το κόστος Κ εξαρτάται από τον όγκο x, ποιον τύπο θα γράφατε για να συνδέσετε το x με το Κ.
ii) Ποιος ο ρόλος του αριθμού 10 στον τύπο; Τι παριστάνει;
iii) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση κόστους και όγκου

Γ) **i)** Αν προστεθεί σταθερό κόστος 200€ κάθε φορά (μεταφορικά, ασφάλειες), πώς αλλάζει ο τύπος;

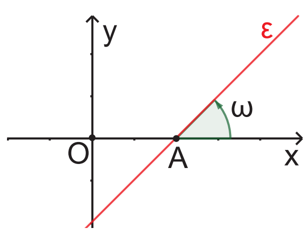
ii) Αν ο νέος τύπος είναι φ(x)=10x+200, τι παριστάνει ο αριθμός 200;

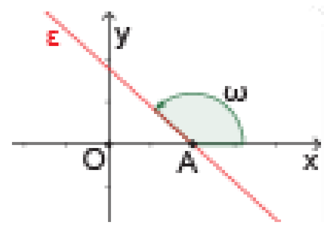
iii) Για πόσα m3 πλήρωσε ένας πελάτης αν έδωσε 1700€ ;

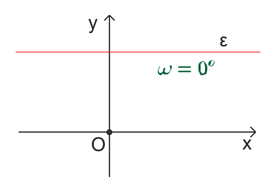
Ας δούμε τι έχει προκύψει

Γωνία που σχηματίζει μια ευθεία με τον άξονα x΄x

Έστω ευθεία ε στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xOy και Α το σημείο στο οποίο τέμνει η ε τον άξονα $x'x$. Ονομάζουμε **γωνία ω που σχηματίζει μια ευθεία ε με τον άξονα x΄x** τη γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Αx κινούμενη κατά τη θετική φορά (την αντίθετη των δεικτών του ρολογιού) μέχρι την ευθεία ε. Για τη γωνία ω ισχύει $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$. Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, οπότε δεν τον τέμνει ή ταυτίζεται με τον άξονα $x'x$, θεωρούμε $\omega = 0^\circ$.

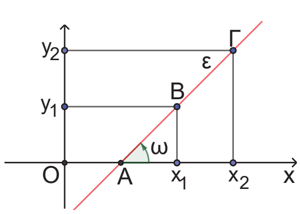




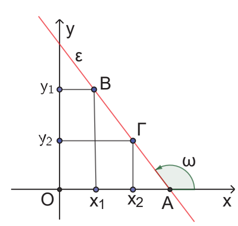


Συντελεστής διεύθυνσης ή κλίση ευθείας

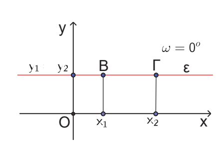
Ονομάζουμε **συντελεστή διεύθυνσης ή κλίση (λ)** μιας ευθείας ε στο καρτεσιανό επίπεδο xOy τον λόγο $\boldsymbol{\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$ όπου $B(x_1, y_1)$ και $\Gamma(x_2, y_2)$ δυο οποιαδήποτε σημεία της ευθείας με $x_1 < x_2$.



σχ.1



σχ.2



σχ.3

- Αν η γωνία ω είναι οξεία (σχ.1), τότε $\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0$,

- Αν η γωνία ω είναι αμβλεία (σχ.2), τότε $\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 0$,

- Αν $\omega = 0^\circ$ (σχ.3), τότε $\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0$.

Τα παραπάνω ισχύουν είτε το σύστημα συντεταγμένων είναι «κανονικό» είτε δεν είναι «κανονικό» , όπως είναι συνήθως στη Φυσική. Υπ' όψιν ότι ένα σύστημα συντεταγμένων λέγεται **«κανονικό»,** αν η κλίμακα στους δύο άξονες x΄x και y΄y είναι η ίδια.
Για παράδειγμα, στο σχήμα 4 (μη κανονικό σύστημα) η κλίση της ευθείας είναι:

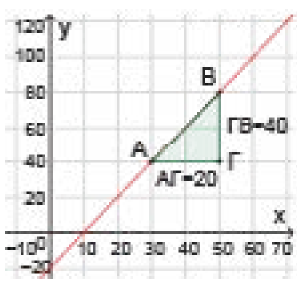
$$\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{80-40}{50-30} = \frac{40}{20} = 2\left(= \frac{(\Gamma B)}{(A\Gamma)}\right)$$

και στο σχήμα 5 (μη κανονικό σύστημα) **η κλίση της ευθείας είναι**:

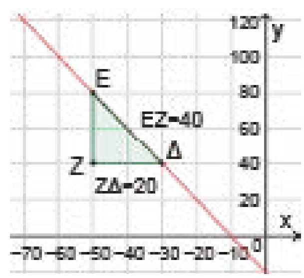
$$\lambda = \frac{y_\Delta - y_E}{x_\Delta - x_E} = \frac{40-80}{(-30)-(-50)} = \frac{-40}{20} = -2\left(= -\frac{(EZ)}{(Z\Delta)}\right)$$

Στο σχήμα 6 (κανονικό σύστημα) η κλίση της ευθείας είναι $\lambda = \frac{y_H - y_\Theta}{x_H - x_\Theta} = \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}\left(= \frac{(HK)}{(\Theta K)}\right)$.

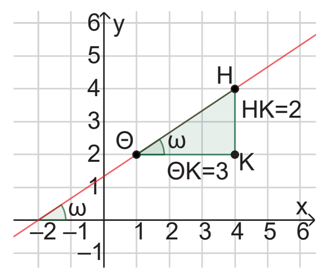
Στην περίπτωση αυτή η κλίση της ευθείας ταυτίζεται με την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει με τον άξονα x΄x.



σχ. 4



σχ. 5

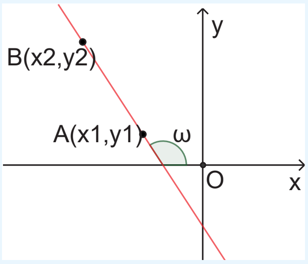


σχ. 6

Η συνάρτηση f(x) = αx + β

Στο Γυμνάσιο μάθαμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha \cdot x + \beta$, με x οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό είναι ευθεία ε **παράλληλη** της ευθείας που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha \cdot x$.
Η ευθεία ε έχει εξίσωση: $y = \alpha x + \beta$ (γράφουμε $\varepsilon : y = \alpha x + \beta$) και
- ✓ έχει κλίση λ = α και
- ✓ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Β(0, β).

Σχόλια



1) Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ δύο σημεία της ευθείας $\varepsilon : y = \alpha x + \beta$, τότε θα ισχύει: $y_1 = \alpha x_1 + \beta$ και $y_2 = \alpha x_2 + \beta$.

Οπότε θα έχουμε $y_2 - y_1 = (\alpha x_2 + \beta) - (\alpha x_1 + \beta) = \alpha(x_2 - x_1)$

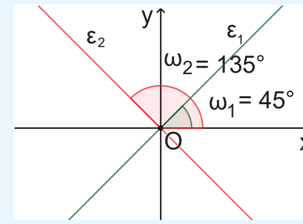
που σημαίνει $\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Πράγματι, ο συντελεστής α, ισούται με την κλίση της ευθείας.
Για παράδειγμα, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-2,1)$ και $B(-4,3)$ έχει κλίση
$\alpha = \frac{3-1}{(-4)-(-2)} = \frac{2}{-2} = -1 < 0$ και σχηματίζει με τον άξονα x΄x αμβλεία γωνία.

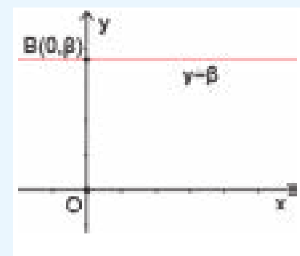
2) Το πρόσημο του α καθορίζει το είδος της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x και αντιστρόφως. Έτσι:

- αν $\alpha > 0$, τότε η γωνία ω είναι οξεία, δηλαδή $0^\circ < \omega < 90^\circ$ και αντιστρόφως ενώ,
- αν $\alpha < 0$, τότε η γωνία ω είναι αμβλεία, δηλαδή $90^\circ < \omega < 180^\circ$ και αντιστρόφως,
- αν $\alpha = 0$, τότε η γωνία ω είναι 0° και η ευθεία είναι παράλληλη με τον άξονα x΄x ή συμπίπτει με αυτόν.

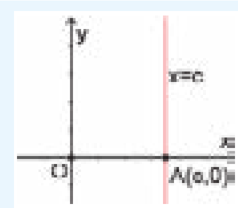
Ειδικά αν $\alpha = 1$, τότε η ευθεία $\varepsilon_1 : y = x$ σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\omega = 45^o$, οπότε είναι η **διχοτόμος του 1ου και 3ου τεταρτημορίου**, ενώ αν $\alpha = -1$, τότε η ευθεία $\varepsilon_2 : y = x$ σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\omega = 135^o$, οπότε είναι η **διχοτόμος του 2ου και 4ου τεταρτημορίου.**



3) Αν στη συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ έχουμε, $\alpha = 0$, τότε ο τύπος της γίνεται $f(x) = \beta$, λέγεται **σταθερή συνάρτηση** και η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία $y = \beta$ που σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία $\omega = 0^\circ$ και είναι παράλληλη στον άξονα x΄x. Αν β=0 η ευθεία με εξίσωση y=0 είναι ο άξονας x΄x.



4) Κάθε **κατακόρυφη ευθεία** έχει εξίσωση $x = c$, όπου c σταθερός αριθμός **δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης,** δεν ορίζεται για αυτήν συντελεστής διεύθυνσης και σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία 90°. Αν $c = 0$, η ευθεία με εξίσωση $x = 0$ είναι ο άξονας y′y.



5) Οι άξονες ενός ορθοκανονικού συστήματος είναι ευθείες με εξισώσεις:

- **x'x :** $\mathbf{y = 0}$ (τα σημεία του άξονα των τετμημένων έχουν τεταγμένη μηδέν).
- **y'y :** $\mathbf{x = 0}$ (τα σημεία του άξονα των τεταγμένων έχουν τετμημένη μηδέν).

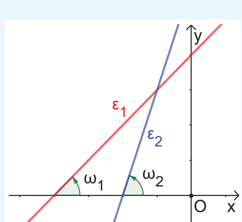
Έτσι:

- τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας ευθείας με τον άξονα x΄x έχουν τεταγμένη 0. Οπότε έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $y = 0$ δηλαδή $\alpha \cdot x + \beta = 0$ και
- το σημείο τομής της γραφικής παράστασης μιας ευθείας με τον άξονα y΄y έχει τετμημένη 0. Οπότε είναι το σημείο $B(0,\beta)$.

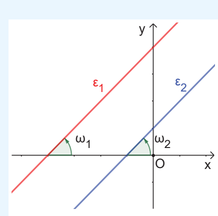
6) Στο γυμνάσιο αναφέρθηκε ότι αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν εξισώσεις:

$$\varepsilon_1 : y = \alpha_1 x + \beta_1 \text{ και } \varepsilon_2 : y = \alpha_2 x + \beta_2 \text{ τότε:}$$

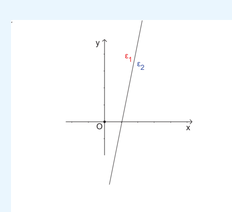
- αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$ τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται (σχήμα 4),
- αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες (σχήμα 5),
- αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 = \beta_2$, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 ταυτίζονται (σχήμα 6).



σχ. 4



σχ. 5



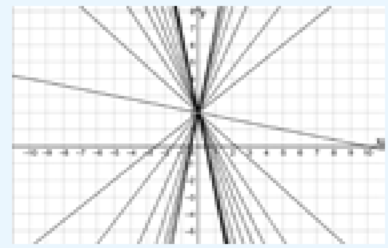
σχ. 6

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: «ΕΥΘΕΙΑ - ΚΛΙΣΗ»

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: «ΕΥΘΕΙΑ - ΣΚΑΛΟΠΑΤΙΑ»

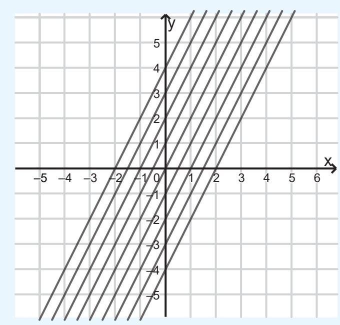
Αξιόλογες παρατηρήσεις

1η) Οι ευθείες με εξίσωση της μορφής $\varepsilon: y=\alpha x+2$, με α οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, όπως για παράδειγμα οι ευθείες $y=x+2$, $y=-x+2$ κ.λ.π. διέρχονται από το σημείο $B(0,2)$. Γενικά, οι ευθείες με εξίσωση της μορφής $\varepsilon: y=\alpha x+\beta$, όπου ο συντελεστής διεύθυνσης «α» μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$ και το «β» είναι σταθερό, σχηματίζουν μια «οικογένεια ευθειών» της οποίας όλα τα μέλη διέρχονται από το σημείο $B(0,\beta)$.



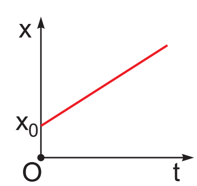
Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: «ΣΤΡΟΦΗ ΕΥΘΕΙΑΣ - ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ»

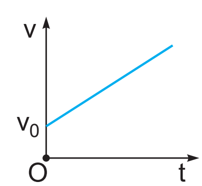
2η) Οι ευθείες με εξίσωση της μορφής $\varepsilon: y=2x+\beta$, με β οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, όπως για παράδειγμα οι ευθείες $y=2x$, $y=2x+1$, $y=2x-1$, $y=2x+2$ κ.λ.π. είναι παράλληλες μεταξύ τους, αφού έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) $\alpha=2$. Γενικά, οι ευθείες με εξίσωση της μορφής $\varepsilon: y=\alpha x+\beta$, όπου ο συντελεστής διεύθυνσης «α» είναι σταθερός και το «β» μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, σχηματίζουν μια οικογένεια ευθειών που είναι παράλληλες μεταξύ τους.



Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: «ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΚΛΙΣΗ»

Εφαρμογές από τη Φυσική





Από τη Φυσική γνωρίζουμε ότι ο τύπος που δίνει τη θέση x, όταν ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με αλγεβρική τιμή της ταχύτητα v και έχει ξεκινήσει από τη θέση x_0 σε συνάρτηση με το χρόνο t, είναι $x=x_0+v\cdot t$ ή καλύτερα $x(t)=v\cdot t+x_0$.
Παρατηρούμε ότι είναι της μορφής $f(x)=\alpha\cdot x+\beta,\ x>0$, όπου x ο χρόνος t, α η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v και β η αρχική θέση x_0 του κινητού. Αντίστοιχα διαγράμματα είναι και τα διαγράμματα της ταχύτητας v συναρτήσει του χρόνου t, αφού οι αντίστοιχοι τύποι είναι $v=v_0+\alpha\cdot t$ ή καλύτερα $v(t)=\alpha\cdot t+v_0$, όπου α η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: «ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ»

Ασκήσεις κατανόησης

Α. Με απάντηση:

1) Το κόστος y μιας διαδρομής με taxi συμπεριλαμβάνει μια σταθερή χρέωση 1,80 € και 0,90 € για κάθε χιλιόμετρο της διαδρομής. Ποια από τις παρακάτω σχέσεις ($x\ge 0$) εκφράζει το κόστος y της διαδρομής x χιλιομέτρων;

i) $y=0{,}9x+1{,}8$ **ii)** $y=0{,}9+1{,}8x$ **iii)** $y=x+1{,}8$ **iv)** $y=0{,}9x$ **v)** καμία από αυτές.

Απάντηση: Η σχέση i)

2) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, ώστε κάθε ευθεία της στήλης (Α) να αντιστοιχίζεται στο είδος της γωνίας που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

Στήλη (Α) Εξίσωση ευθείας	Στήλη (Β) Είδος γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$
1) $y=-x+3$	Α) Οξεία
2) $y=\frac{1}{2}x-1$	
3) $x-y=0$	Β) Αμβλεία
4) $y=\left(\lambda^2+1\right)x-2026$, λ πραγματικός αριθμός	
5) $x=2026$	Γ) Ορθή

Στήλη (Α)	1	2	3	4	5
Στήλη (Β)	Β	Α	Α	Α	Γ

Απάντηση: Η ευθεία iv).

Β. Για εξάσκηση

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω;

Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$ στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής. Χαράσσουμε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που περιέχουν τη μορφή: $y=\alpha x+\beta$ και με τη βοήθειά τους, αναδεικνύουμε τον ρόλο των παραμέτρων α και β και συλλέγουμε πληροφορίες σχετικές με τη κλίση, τα σημεία τομής με τους άξονες, το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών τους, καθώς και τον τύπο της συνάρτησης κ.α.

Λυμενες Εφαρμογες

Εφαρμογη 1

Οι πολεοδόμοι χρησιμοποιούν πολλές φορές συστήματα συντεταγμένων στους χάρτες τους για τη χάραξη δρόμων και σηράγγων. Σε έναν τέτοιο χάρτη, η ευθεία σήραγγα που θα φτιαχτεί στα νότια προάστια της Αθήνας θα περάσει από τα σημεία $A(-200,0)$ και $B(0,100)$. Αφού τρυπήσει το βουνό θα περάσει από το σημείο $\Gamma(300,250)$;

Λυση

Πρέπει να εξετάσουμε αν τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά!

Μια καλή «στρατηγική» για να εξετάσουμε, αν τρία σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά είναι η εξής:
- Βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β και
- Εξετάζουμε, αν το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία ΑΒ, δηλαδή αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Έχουμε:

✓ Η εξίσωση της σήραγγας των πολεοδόμων σε ένα σύστημα συντεταγμένων θα είναι της μορφής: $y=\alpha x+\beta$ (υποθέτουμε ότι δεν είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$). Επειδή διέρχεται από το σημείο $B(0,100)$, θα ισχύει $100=\alpha\cdot 0+\beta$, που σημαίνει $\beta=100$. Έτσι, η εξίσωση γίνεται: $y=\alpha x+100$.

Επειδή διέρχεται και από το σημείο $A(-200,0)$ θα ισχύει: $0=\alpha\cdot(-200)+100$ που σημαίνει $\alpha=\frac{1}{2}$.

Άρα η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι: $y=\frac{1}{2}x+100$.

✓ Όμως: $\frac{1}{2}\cdot 300+100=250$. Άρα η σήραγγα θα περάσει από το σημείο $\Gamma(300,250)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που:

i) διέρχεται από το σημείο $B(0,0)$ και έχει κλίση α = −1,

ii) διέρχεται από το σημείο $A(-1,3)$ και έχει κλίση α = 3,

iii) διέρχεται από τα σημεία $A(-1,3)$ και $\Gamma(1,-3)$.

ΛΥΣΗ

i) Η ευθεία έχει εξίσωση της μορφής : $y=\alpha x$ (γιατί;). Όμως $\alpha=-1$, άρα η εξίσωση γίνεται $y=-x$.

ii) Η ευθεία έχει εξίσωση της μορφής: $y=\alpha x+\beta$. Όμως α = 3, άρα η εξίσωση γίνεται: $y=3x+\beta$. Το σημείο $A(-1,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της ευθείας, οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Δηλαδή $3=3(-1)+\beta$, επομένως β = 6. Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $y=3x+6$.

iii) Η ευθεία έχει εξίσωση της μορφής: $y=\alpha x+\beta$. Αρχικά βρίσκουμε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $\alpha=\frac{-3-3}{1-(-1)}=\frac{-6}{2}=-3$, οπότε η εξίσωση γίνεται $y=-3x+\beta$. Το σημείο $A(-1,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της ευθείας, οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Δηλαδή $3=-3(-1)+\beta$, επομένως β = 0. Άρα η ευθεία είναι η $y=-3x$.

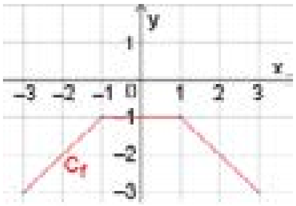
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

α) Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις:

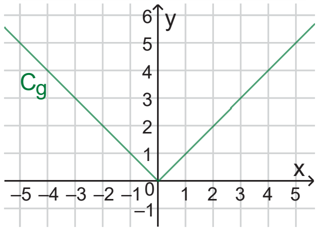
i) $\mathbf{f(x)=\begin{cases} x, & \alpha\nu\quad -3\le x<-1 \\ -1, & \alpha\nu\quad -1\le x<1 \\ -x, & \alpha\nu\quad 1\le x\le 3 \end{cases}}$, ii) $\mathbf{g(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R}}$, iii) $\mathbf{h(x)=|x-1|-|2-x|,\ x\in\mathbb{R}}$

β) Από τη γραφική παράσταση των παραπάνω συναρτήσεων να προσδιορίσετε τα σύνολα τιμών τους.

ΛΥΣΗ



α) i) Με τη βοήθεια των σημείων $(-3,-3)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$ και $(3,-3)$ χαράσσουμε τα τρία ευθύγραμμα τμήματα της γραφικής παράστασης που φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



ii) Για $x\ge 0$ έχουμε $g(x)=x$, ενώ για $x<0$ έχουμε $g(x)=-x$, οπότε για κάθε πραγματικό αριθμό x έχουμε: $g(x)=\begin{cases} -x & ,x<0 \\ x & ,x\ge 0 \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι και οι δύο κλάδοι της συνάρτησης έχουν γραφική παράσταση ημιευθείες. Έτσι, έχουμε το διπλανό σχήμα:

iii) Με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα προσήμων έχουμε:

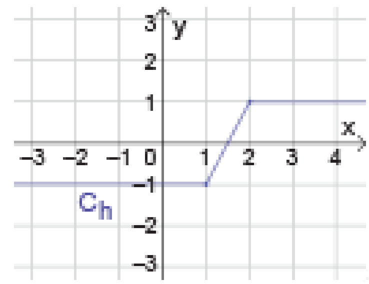
x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x – 1		–	0	+		+	
2 – x		+		+	0	–	

✓ Αν $x \le 1$ τότε $x-1 \le 0$ και $2-x>0$, οπότε $g(x) = -(x-1)-(2-x) = -1$.

✓ Αν $1<x\le 2$ τότε $x-1>0$ και $2-x\ge 0$ οπότε $g(x) = x(x-1)-(2-x) = 2x-3$.

✓ Αν $x>2$ τότε $x-1>0$ και $2-x<0$, οπότε $g(x) = (x-1)-\left[-(2-x)\right] = 1$.

Άρα ο τύπος συνάρτησης γίνεται $h(x) = \begin{cases} -1 & , x \le 1 \\ 2x-3 & , 1<x\le 2 \\ 1 & , x>2 \end{cases}$.



β) i) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει ότι $f(A) = (-\infty,-1]$.

ii) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει ότι $g(A) = [0,+\infty)$.

iii) Από τη γραφική παράσταση της h προκύπτει ότι $h(A) = [-1,1]$.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: ***ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4*** *και* ***ΑΣΚΗΣΗ*** *(Προβλήματα διερευνητικής μάθησης/μοντελοποίησης)*

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: ***ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5*** *(Πρόβλημα διερευνητικής μάθησης/μοντελοποίησης)*

Ασκήσεις – Προβλήματα

1) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Αν διέρχεται από τα σημεία $A(4,-2)$ και $B(1,4)$.

β) Αν σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\omega = 0^\circ$ και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο B(0, 3).

γ) Αν είναι παράλληλη με την ευθεία $\eta: y=-3x+2$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Αν είναι κατακόρυφη και τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $\Gamma(-3,0)$.

2) Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (2\lambda-3)x+3$, όπου λ πραγματικός αριθμός και $\varepsilon_2: y=3x+4$.

α) Να βρεθεί η τιμή του λ, αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία ε_2 τέμνει τους άξονες.

γ) Να βρεθεί η τιμή του λ, αν η ευθεία ε_1 διέρχεται από το σημείο $A(2,-1)$.

δ) Για την τιμή του λ που θα προκύψει από το ερώτημα γ) να εξετάσετε, αν τα σημεία $A(2,-1)$, $B(-1,5)$ και $\Gamma(3,-3)$ είναι συνευθειακά.

3) A) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i) α) $f(x) = 2x-3$, **β)** $g(x) = -2x+3$ και **γ)** $h(x) = |2x-3|$

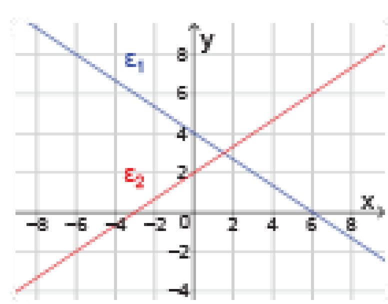
ii) α) $f(x) = x-2$, **β)** $g(x) = x+2$ και **γ)** $h(x) = |x-2|-|x+2|$

B) Από τη γραφική τους παράσταση των παραπάνω συναρτήσεων να προσδιορίσετε τα σύνολα τιμών τους

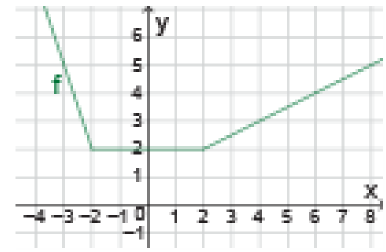
4) α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 του σχήματος:

β) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των.

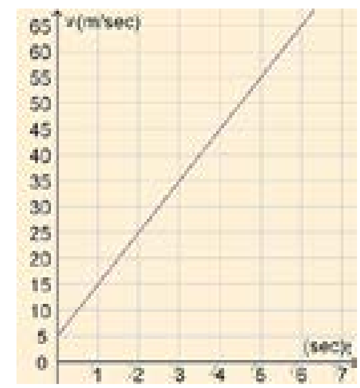
γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση στο ερώτημα β).



5) Να βρείτε τη συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα:

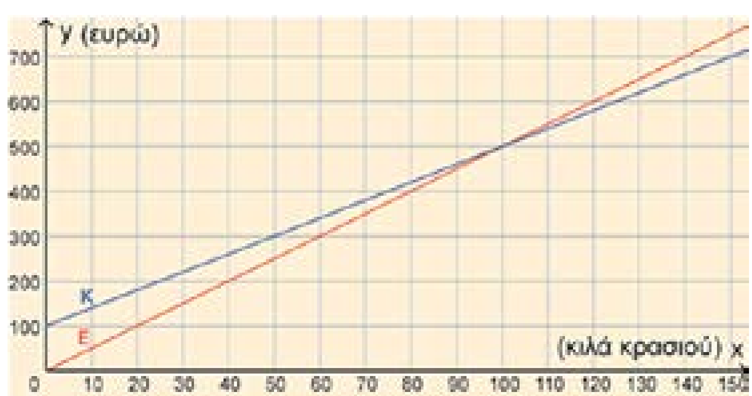


6) Η γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της ταχύτητας v (σε m/sec) ως συνάρτηση του χρόνου t (σε sec), με την οποία μία πέτρα πέφτει από την κορυφή ενός λόφου, δίνεται από το διπλανό σχήμα:



- **i)** Βρείτε την κλίση της ημιευθείας και το σημείο τομής της με τον άξονα y΄y και εξηγήστε τι περιγράφει η κάθε τιμή από αυτά τα μεγέθη.
- **ii)** Βρείτε την εξίσωση της ημιευθείας.
- **iii)** Βρείτε την ταχύτητα της πέτρας, μετά από 8 sec.

7) Μια κάβα πουλάει κρασί Νεμέας. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ημερήσιων εξόδων K(x) και εσόδων E(x) από τη πώληση x λίτρων κρασιού.



- **i)** Να εκτιμήσετε πόσα κιλά πρέπει να πουλήσει ημερησίως για να καλύψει ακριβώς τα έξοδά της;
- **ii)** Ποια είναι τα πάγια έξοδα της κάβας;
- **iii)** Αν πουλήσει 75 κιλά κρασί ημερησίως, θα έχει ζημιά ή κέρδος;
- **iv)** Αν πουλήσει 125 κιλά κρασί ημερησίως, θα έχει ζημιά ή κέρδος;
- **v)** Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων K(x) και E(x) και να επαληθεύσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο ερώτημα i).

8) Στις παρακάτω προτάσεις δίνονται 3 συναρτήσεις της μορφής y = αx + β. Να αναγνωρίσετε την κλίση «α» και την παράμετρο «β» και να εξηγήσετε το ρόλο τους σε κάθε περίπτωση.

- **i)** Το κόστος C(n), σε ευρώ, για την παραγωγή n προϊόντων δίνεται από τη σχέση C(n) = 25n + 1000.
- **ii)** Η θερμοκρασία T(t), σε βαθμούς Κελσίου, μιας δεξαμενής νερού αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου t σε ώρες, σύμφωνα με τη σχέση $T(t) = 20 + \frac{5}{2} \cdot t$.
- **iii)** Το κόστος K(d), σε ευρώ, μιας διαδρομής με ταξί που εξαρτάται από την απόσταση d, σε χιλιόμετρα, δίνεται από τη σχέση K(d) = 3 + 1,2d.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο και απαντήστε στο σύντομο test που προτείνεται.

2.3.

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Τι καινούργιο υπάρχει στην παράγραφο

Με την ύλη της παραγράφου αυτής θα μάθουμε:

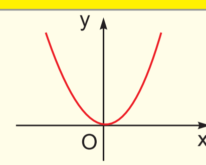
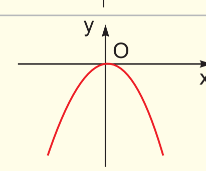
1) να αναγνωρίζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και τις τετμημένες των σημείων τομής της με τον άξονα x'x , ως τις ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$,

2) να προσδιορίζουμε αλγεβρικά και να ερμηνεύουμε γραφικά το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$,

3) να χρησιμοποιούμε πολυωνυμικές συναρτήσεις 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού, στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.

Απαραίτητες γνώσεις

Η συνάρτηση $y = \alpha \cdot x^2$, $\alpha \neq 0$ είναι παραβολή με τα χαρακτηριστικά του διπλανού πίνακα:

Κορυφή	Άξονας συμμετρίας	Συντελεστής	Γραφική παράσταση	Μέγιστη ή Ελάχιστη τιμή
(0, 0)	x = 0	α > 0		Η συνάρτηση παίρνει ελάχιστη τιμή y = 0, όταν x = 0
		α < 0		Η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή y = 0, όταν x = 0

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: «ΠΑΡΑΒΟΛΗ y = αx²».

Εισαγωγική δραστηριότητα

Μέρος Α

Είναι γνωστό ότι το νερό γίνεται πάγος στους 32° F (Fahrenheit) ή στους 0° C (Celsius). Είναι επίσης γνωστό ότι το νερό βράζει στους 212° F ή στους 100° C.

Α1: Βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει τη συμμεταβολή των βαθμών Fahrenheit και Celsius, αν γνωρίζεται ότι είναι μορφής $F = \alpha \cdot C + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

Α2: Βρείτε τη θερμοκρασία της θάλασσας κάτω από το βράχο της φωτογραφίας, σε βαθμούς Celsius, αν γνωρίζουμε ότι σε βαθμούς Farhenheit ήταν 75° F.

Μέρος Β

Πάνω από τον βράχο ένας κολυμβητής, κάνει βουτιά από ύψος 40m και χρειάζεται 2,86sec για να φτάσει στο επίπεδο της θάλασσας (τα στιγμιότυπα της οποίας φαίνονται στη διπλανή φωτογραφία).

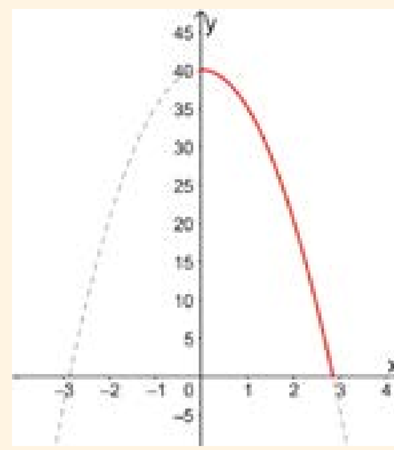
Β1: Ποιο μαθηματικό μοντέλο συνάρτησης προσομοιώνει τη βουτιά του κολυμβητή; Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης της απόστασης (h) του κολυμβητή από την επιφάνεια της θάλασσας συναρτήσει του χρόνου (t).

Β.1 Αν ο τύπος που συνδέει τα δύο μεγέθη είναι: $h(t)=40-4{,}9t^2, \quad 0\le t\le 2{,}86$, να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

Β2: Σε ποιο ύψος βρίσκεται ο κολυμβητής, μετά από 2 sec;

Β3: Πόσος χρόνος απαιτείται, ώστε ο κολυμβητής να φτάσει σε ύψος 10m από την επιφάνεια της θάλασσας;

Β4: Από τη στιγμή που το σώμα του κολυμβητή είναι ολόκληρο μέσα στο νερό, αισθάνεται τη μείωση της θερμοκρασίας. Αν γνωρίζουμε (ερώτημα Α) ότι η θερμοκρασία του νερού στην επιφάνεια είναι 23,9°C και ότι μειώνεται κατά 1°C **για κάθε 3 μέτρα βάθους**, μπορείτε να βρείτε τη θερμοκρασία του νερού σε βάθος 8 μέτρων;



Ας δούμε τι έχει προκύψει

Μορφές τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, όπου α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\neq 0$.
Αλγεβρικός προσδιορισμός του προσήμου των τιμών της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$

Για τη συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha\neq 0$ έχουμε:

$$f(x)=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left(x^2+2\frac{\beta}{2\alpha}x+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left(x^2+2\frac{\beta}{2\alpha}x+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=$$

$$\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]$$, όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ η **διακρίνουσα** του τριωνύμου.

1) Αν **Δ > 0 τότε** η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες x_1,x_2, έστω $x_1<x_2$ και παίρνει τη μορφή:

$$\mathbf{f(x)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right]=\alpha\left(x-\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x-\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)=\alpha(x-x_1)(x-x_2)},$$

- Αν $x<x_1$, τότε $x<x_2$, οπότε $x-x_1<0$ και $x-x_2<0$, οπότε $(x-x_1)(x-x_2)>0$.

Άρα το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ θα είναι **ομόσημο** του α.

- Αν $x>x_2$, τότε $x<x_1$, οπότε $x-x_1>0$ και $x-x_2>0$, οπότε $(x-x_1)(x-x_2)>0$.
  Άρα το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ θα είναι **ομόσημο** του α.

- Αν $x_1<x<x_2$, τότε $x-x_1>0$ και $x-x_2<0$, οπότε $(x-x_1)(x-x_2)<0$. Άρα το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ θα είναι **ετερόσημο** του α.

  Έτσι, για τη συνάρτηση $f(x)=2x^2-8x+6$ έχουμε: $\Delta=16>0$, $x_1=1$, $x_2=3$, οπότε $f(x)=2(x-1)(x-3)$.

- Αν $x<1$, τότε $x<3$, οπότε $x-1<0$ και $x-3<0$, οπότε $(x-1)(x-3)>0$.

- Αν $x>3$, τότε $x>1$, οπότε $x-3>0$ και $x-1>0$, οπότε $(x-1)(x-3)>0$.

Άρα για $x<1$ ή $x>3$ το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f θα είναι **ομόσημο** του 2, δηλαδή θετικό.

- Αν $1<x<3$, τότε $x-1>0$ και $x-3<0$, οπότε $(x-1)(x-3)<0$ και το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f θα είναι **ετερόσημο** του 2, δηλαδή αρνητικό.

2) Αν **Δ = 0, τότε** η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες $x_1=x_2\,(=x_0)$ και παίρνει τη μορφή:

$$\mathbf{f(x)=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\alpha(x-x_0)^2}$$

Οπότε για κάθε πραγματική τιμή του x με $x\neq x_0$, $(x-x_0)^2>0$ άρα το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ θα είναι **ομόσημο** του α.
Έτσι, για τη συνάρτηση $h(x)=0{,}5x^2-2x+2$ έχουμε $\Delta=0$ και $x_1=x_2\,(=x_0)=2$, οπότε $h(x)=(x-2)^2$.
Άρα για κάθε $x\neq 2$ το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης h είναι **ομόσημο** του 0,5 δηλαδή θετικό.

3) Αν **Δ < 0, τότε** η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και παίρνει τη μορφή:

$$\mathbf{f(x)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]}$$

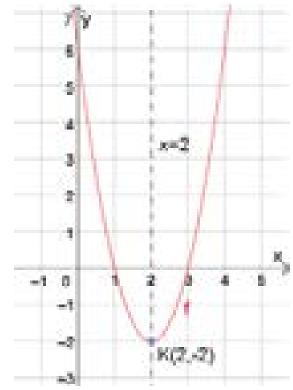
Οπότε για κάθε πραγματική τιμή του x, $\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]>0$ άρα το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ θα είναι **ομόσημο** του α.

Έτσι, για τη συνάρτηση $g(x)=x^2+2x+3$ έχουμε: $\Delta=-8<0$, οπότε $g(x)=(x+1)^2+2$, οπότε για κάθε πραγματική τιμή του x το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης g είναι **ομόσημο** του 1 δηλαδή θετικό.

Γραφική ερμηνεία του προσήμου των τιμών της συνάρτησης

Με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra χαράσσουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων των παραπάνω παραδειγμάτων:

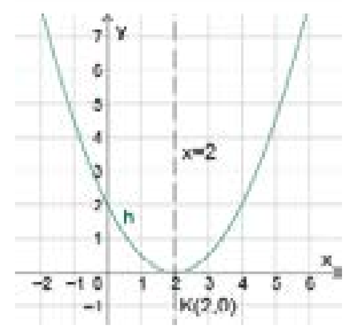
α) $f(x)=2x^2-8x+6$ που φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



Διαπιστώνουμε ότι η γραφική παράσταση είναι παραβολή και:

- έχει κορυφή το σημείο $K(2,-2)$,
- έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=2$,
- παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x_0=2$ την τιμή $f(2)=-2$,
- τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία με τετμημένες $x_1=1$ και $x_2=3$ που είναι οι ρίζες της εξίσωσης f(x) = 0, δηλαδή της εξίσωσης $2x^2-8x+6=0$ αφού $f(1)=0$ και $f(3)=0$,
- οι τιμές της είναι θετικές για $x<1$ ή $x>3$ και αρνητικές για $1<x<3$.

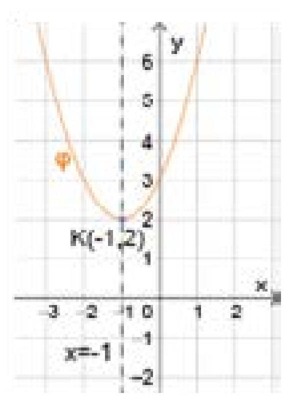
β) $h(x)=0{,}5x^2-2x+2$ που φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



Διαπιστώνουμε ότι η γραφική παράσταση είναι παραβολή και:

- έχει κορυφή το σημείο $K(2,0)$,
- έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=2$,
- παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x_0=2$ την τιμή $h(2)=0$,
- εφάπτεται στον άξονα x΄x στο σημείο με τετμημένη $x_0=2$ που είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$, δηλαδή της εξίσωσης $0{,}5x^2-2x+2=0$, αφού $h(2)=0$,
- οι τιμές της είναι θετικές για κάθε τιμή του $x\neq 2$.

γ) $\varphi(x)=x^2+2x+3$ που φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



Διαπιστώνουμε ότι η γραφική παράσταση είναι παραβολή και:

- έχει κορυφή το σημείο $K(-1,2)$,
- έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=-1$,
- παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x_0=-1$ την τιμή $\varphi(-1)=2$,
- δεν τέμνει τον άξονα x΄x, οπότε η εξίσωση $\varphi(x)=0$ δεν έχει ρίζες,
- οι τιμές της είναι θετικές για κάθε τιμή του x.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο (σχέδιο μαθήματος): "ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ "

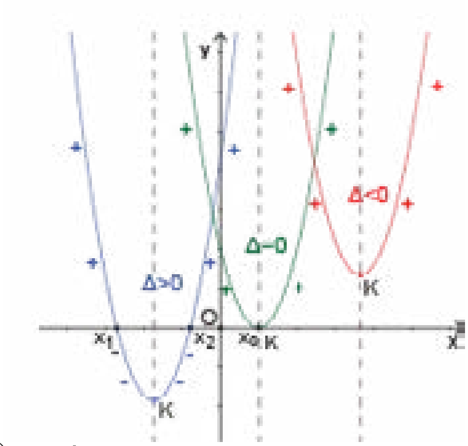
Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο (σχέδιο μαθήματος): "ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ"

Δραστηριότητα

Με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra ή οποιουδήποτε άλλου λογισμικού να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$, **β)** $h(x) = -0{,}5x^2 + 2x - 2$, **γ)** $\varphi(x) = -x^2 - 2x - 3$.

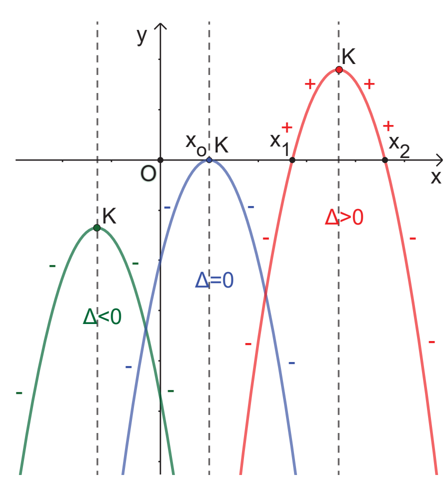
Γενικεύοντας τα παραπάνω έχουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ είναι **παραβολή,** που εξαρτάται από τα πρόσημα του α και της διακρίνουσας $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.



- Αν $\alpha > 0$
  - έχει κορυφή το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$ δηλαδή το $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$,
  - έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$,
  - παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ την τιμή $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$,
  - αν $\Delta > 0$ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία με τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, αν $\Delta = 0$ εφάπτεται στον άξονα x΄x στο σημείο με τετμημένη τη διπλή ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ ενώ αν $\Delta < 0$ δεν τέμνει τον άξονα x΄x,
  - οι τιμές της είναι: αν $\Delta > 0$ θετικές για τα x εκτός των ριζών και αρνητικές για τα x μεταξύ των ριζών, αν $\Delta = 0$ θετικές για κάθε τιμή x με $x \neq x_0$, ενώ αν $\Delta < 0$ θετικές για κάθε πραγματικό αριθμό x.

- Αν $\alpha < 0$ έχουμε:

  Διαπιστώνουμε ότι η γραφική παράσταση είναι παραβολή και:



  - έχει κορυφή το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$ δηλαδή $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$,
  - έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$,
  - παρουσιάζει μέγιστη τιμή στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ την τιμή $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$,
  - αν $\Delta > 0$ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία με τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, αν $\Delta = 0$ εφάπτεται στον άξονα x΄x στο σημείο με τετμημένη τη διπλή ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ ενώ αν $\Delta < 0$ δεν τέμνει τον άξονα x΄x,
  - οι τιμές της είναι: αν $\Delta > 0$ αρνητικές για τα x εκτός των ριζών και θετικές για τα x μεταξύ των ριζών, αν $\Delta = 0$ αρνητικές για κάθε τιμή του x με $x \neq x_0$, ενώ αν $\Delta < 0$ αρνητικές για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Συγκεντρωτικά έχουμε:

Διακρί-νουσα	Σημεία Τομής με Άξονα x΄x - Ρίζες της f(x) = 0	Πρόσημο των τιμών της f		Μορφή τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
		α > 0	α < 0	
$\Delta > 0$	• Δύο σημεία τομής με τον άξονα x΄x. • Η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες: $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$	• Θετικές εκτός των ριζών • Αρνητικές μεταξύ των ριζών	• Αρνητικές εκτός των ριζών • Θετικές μεταξύ των ριζών	$f(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	• Ένα σημείο επαφής με τον άξονα x΄x. • Η εξίσωση έχει μία διπλή πραγματική ρίζα: $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$	Θετικές για όλες τις τιμές του $x \neq -\frac{\beta}{2\alpha}$	Αρνητικές για όλες τις τιμές του $x \neq -\frac{\beta}{2\alpha}$	$f(x) = \alpha(x - x_0)^2$
$\Delta < 0$	• Δεν τέμνει τον άξονα x΄x. • Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.	Θετικές για όλες τις τιμές του x.	Αρνητικές για όλες τις τιμές του x.	$f(x) = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\lvert\Delta\rvert}{4\alpha^2}\right]$

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: «ΤΡΙΩΝΥΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ»

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: «BASKET»

Μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων

Με τα παραπάνω συμπεράσματα θα επιλύσουμε προβλήματα που χρησιμοποιούν συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \ \alpha \neq 0$

Σε γενικές γραμμές, η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1ο: Χρησιμοποιούμε μεταβλητές για να μετατρέψουμε το πρόβλημα από την καθομιλουμένη γλώσσα, στη γλώσσα των Μαθηματικών. Έτσι προκύπτει μια συνάρτηση ή μια εξίσωση (με μία ή περισσότερες μεταβλητές που εκφράζουν το πρόβλημα) και την οποία πρέπει να μελετήσουμε ή να λύσουμε αντίστοιχα.

Βήμα 2ο: Αν προκύπτουν παραπάνω από μία μεταβλητές, πρέπει να τις εκφράσουμε ως προς μία μεταβλητή, που συνήθως την ορίζει το πρόβλημα.

Βήμα 3ο: Λαμβάνουμε υπόψιν μας περιορισμούς που προκύπτουν από το πρόβλημα για τις μεταβλητές που θεωρούμε, καθώς και τις κατάλληλες μονάδες μέτρησης.

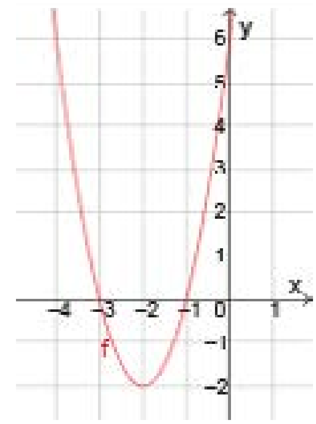
Βήμα 4ο: Μελετάμε τη συνάρτηση ή λύνουμε την εξίσωση.

Βήμα 5ο: Ελέγχουμε τις λύσεις της εξίσωσης, ως προς τους περιορισμούς του 3ου βήματος. Έτσι, αποδεχόμαστε ή απορρίπτουμε υποψήφιες λύσεις του προβλήματος.

Ασκήσεις κατανόησης

Α. Με απάντηση

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2+8x+6$ με γραφική παράσταση τη παραβολή του σχήματος:



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α) Οι ρίζες της συνάρτησης f (δηλαδή οι τιμές του x που μηδενίζουν τη συνάρτηση) είναι:

Α. $x=-3$ ή $x=-1$ **Β.** $x=1$ ή $x=3$ **Γ.** $x=0$ ή $x=3$

β) Η τιμή της συνάρτησης f για x = 0 είναι:

Α. -3 **Β.** -1 **Γ.** 3

γ) Η συνάρτηση έχει θετικές τιμές για:

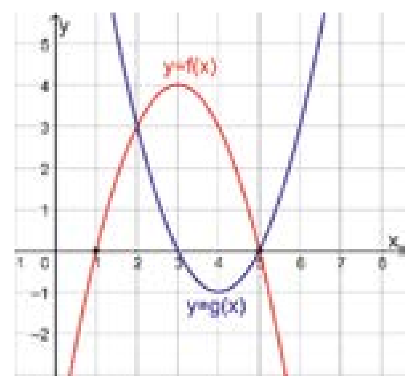
Α. $-3<x<-1$ **Β.** $x<-3$ ή $x>-1$ **Γ.** $x=-3$ ή $x=-1$

δ) Η συνάρτηση έχει αρνητικές τιμές για:

Α. $-3<x<-1$ **Β.** $x<-3$ ή $x>-1$ **Γ.** $x=-3$ ή $x=-1$

Απάντηση: α) Α, **β)** Γ , **γ)** Β , **δ)** Α

2) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων f και g. Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις:



1) Οι λύσεις της ανίσωσης f(x)>g(x) είναι:

Α. 1 < x < 5 **Β.** x < 1 ή x > 5 **Γ.** 2 < x < 5 **Δ.** x < 2 ή x > 5

2) Οι λύσεις της εξίσωσης f(x)=g(x) είναι:

Α. x **= 1 ή x = 3** **Β. x = 2 ή x = 5** **Γ. x = 3** **Δ. x = 1**

Απάντηση: 1) Γ, **2)** Β

Β. Για εξάσκηση

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό, προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση $f(x) = αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$ στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής. Χαράσσουμε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που περιέχουν τη μορφή της συνάρτησης f και με τη βοήθεια τους προσδιορίζουμε τις ρίζες της εξίσωσης f(x) = 0, καθώς και το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ένα αρχιτεκτονικό γραφείο σχεδίασης κήπων πρόκειται να φτιάξει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και να το περιφράξει με σύρμα μήκους 16 m.

α) Σχεδιάστε διάφορα ορθογώνια με περίμετρο 16 m και υπολογίστε το εμβαδόν τους.

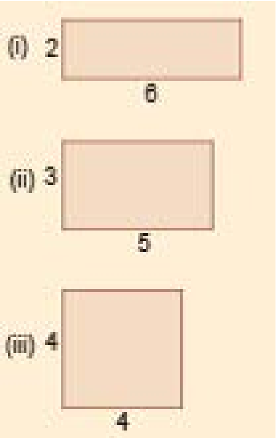
Αν x, y οι διαστάσεις του κήπου:

β) να βρείτε τη σχέση των διαστάσεων x και y και να δώσετε τους περιορισμούς των x και y.

γ) να εκφράσετε με ένα μαθηματικό μοντέλο το εμβαδόν του κήπου σε συνάρτηση μιας εκ των διαστάσεων.

δ) να βρεθεί το μέγιστο εμβαδόν του.

ΛΥΣΗ



α) Στην περίπτωση (i) το εμβαδόν είναι $E = 2 \cdot 6 = 12 m^2$.
Στην περίπτωση (ii) είναι $E = 3 \cdot 5 = 15 m^2$ και στην περίπτωση (iii) είναι $E = 4 \cdot 4 = 16 m^2$. Τι παρατηρείτε;

β) Αν x το μήκος της μιας πλευράς και y της άλλης τότε η περίμετρος θα είναι $\Pi = 2x + 2y$, δηλαδή $16 = 2x + 2y$, άρα $y = 8 - x$.
Πρέπει και αρκεί $x > 0$ και $y = 8 - x > 0$, δηλαδή $x > 0$ και $x < 8$, επομένως $2 < x < 8$.

γ) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = x \cdot y$, οπότε
$E(x) = x \cdot (8 - x) = -x^2 + 8x$, με $2 < x < 8$.

δ) Η συνάρτηση του εμβαδού έχει μορφή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha = -1$, $\beta = 8$ και $\gamma = 0$ και παρουσιάζει μέγιστο για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = 4$, οπότε και η άλλη πλευρά είναι $y = 8 - 4 = 4$. Άρα από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 16cm μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο πλευράς 4 m και ισούται με: $E(4) = -4^2 + 8 \cdot 4 = 16 m^2$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Α) **Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις (τριώνυμα):** **α)** $\mathbf{3x^2 + 5x - 2}$, **β)** $\mathbf{9x^2 - 6x + 1}$

Β) **Να απλοποιηθεί το κλάσμα:** $\mathbf{\dfrac{3x^2 + 5x - 2}{9x^2 - 6x + 1}}$

ΛΥΣΗ

Α) **α)** $\left(\Delta = 49 > 0, x_1 = \dfrac{1}{3}, x_2 = -2\right)$, $3x^2 + 5x - 2 = 3\left(x - \dfrac{1}{3}\right)(x + 2) = (3x - 1)(x + 2)$

β) $\left(\Delta = 0, x_0 = \dfrac{1}{3}\right)$, $9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 = 3^2\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 = (3x - 1)^2$

Β) $\dfrac{3x^2 + 5x - 2}{9x^2 - 6x + 1} = \dfrac{(3x - 1)(x + 2)}{(3x - 1)^2} = \dfrac{x + 2}{3x - 1}$

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: ***ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3*** *και* ***ΑΣΚΗΣΕΙΣ*** *(Προβλήματα διερευνητικής μάθησης μοντελοποίησης)*

Ασκήσεις - Προβλήματα

1) Με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra (ή οποιουδήποτε άλλου λογισμικού), να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$\varphi_1(x) = -2x^2$, $\varphi_2(x) = -2x^2 + 3$, $\varphi_3(x) = -2(x - 1)^2$, $\varphi_4(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

Να εξετάσετε αν η μια συνάρτηση είναι μετατόπιση της άλλης και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2) Δίνεται η παράσταση $A = \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + x - 6}$.

Α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α και να την απλοποιήσετε.

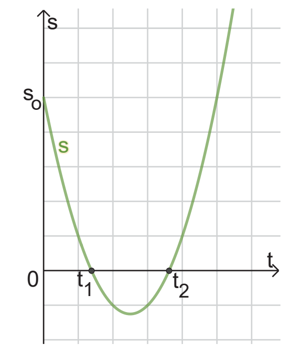
Β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \dfrac{2028^2 - 2028 - 12}{2028^2 + 2028 - 6} + \dfrac{2}{2026}$.

3) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης θέσης ενός κινητού $y = s(t)$ συναρτήσει του χρόνου t, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με αρχική θέση s_0 φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

α) Ποιες χρονικές στιγμές το κινητό βρίσκεται στην αρχή του άξονα κίνησης;

β) Ποιο χρονικό διάστημα το κινητό κινείται στον άξονα κίνησης αριστερά από την αρχή του άξονα;

γ) Ποιο χρονικό διάστημα το κινητό κινείται στον άξονα κίνησης δεξιά από την αρχή του άξονα;



4) Τα εβδομαδιαία έσοδα από την πώληση x ηλεκτρονικών κονσόλων Play-Do δίνεται από τον τύπο $R(x) = 1{,}5x^2 + 92x$ ευρώ, υπό την προϋπόθεση ότι $0 \leq x \leq 50$. Αντίστοιχα, το κόστος της κατασκευής των x κονσόλων Play-Do δίνεται από τον τύπο $C(x) = 20x + 378$ ευρώ.

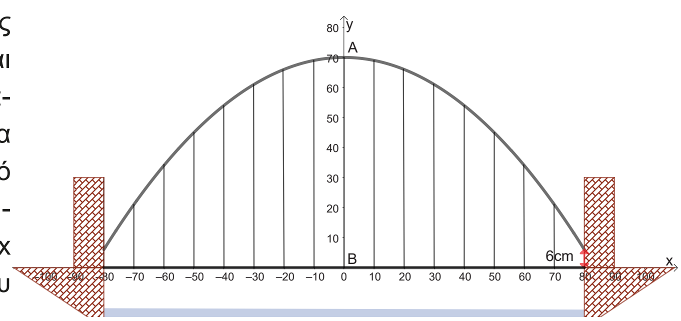
i) Βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει το εβδομαδιαίο κέρδος, $y = P(x)$.

ii) Με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra (ή οποιουδήποτε άλλου λογισμικού) να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση $y = P(x)$ και βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες, καθώς και την κορυφή της παραβολής που προκύπτει.

iii) Εξηγήστε τον ρόλο των ριζών της συνάρτησης $y = P(x)$ και των συντεταγμένων της κορυφής.

5) Ο αριθμός 10 πρέπει να γραφτεί ως άθροισμα δύο αριθμών x και y. Να βρείτε τους αριθμούς x και y, αν πρέπει το γινόμενό τους να είναι το μεγαλύτερο δυνατόν.

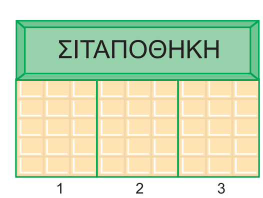
6) Θεωρούμε το διπλανό διάγραμμα γέφυρας: Η ΑΒ είναι η ψηλότερη στήλη υποστήριξης της γέφυρας με τις άλλες στήλες βρίσκονται σε απόσταση 10m μεταξύ τους. Το παραβολικό τόξο της γέφυρας συναντά τα άκρα των στηλών σε ύψος 6m πάνω από την επιφάνεια της λεωφόρου. Αν χρησιμοποιήσετε σύστημα αξόνων, με τον x΄x να είναι η λεωφόρος και y΄y η ευθεία που διέρχεται από τη στήλη ΑΒ.



i) να βρείτε ένα μαθηματικό μοντέλο που να εκφράζει την εξίσωση του παραβολικού τόξου,

ii) αν η εξίσωση είναι $y = -0{,}01x^2 + 70$, να βρείτε τα μήκη των στηλών της γέφυρας.

7) Ένας αγρότης διαθέτει 240 μέτρα πλέγματος περίφραξης και δημιουργεί στο πίσω μέρος της σιταποθήκης τρεις φράχτες σχήματος ορθογώνιου παραλληλογράμμου, που θα φιλοξενούν τρία είδη ζώων. Έστω x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου που σχηματίζεται και από τους τρεις φράκτες. Οι πλευρές που συνορεύουν με την αποθήκη δεν θα χρειαστούν πλέγμα.



1) Να βρείτε τη σχέση των διαστάσεων x, y θεωρώντας κατάλληλους περιορισμούς για τις μεταβλητές x, y.

2) Να εκφράσετε με ένα μαθηματικό μοντέλο το εμβαδόν που σχηματίζουν και οι τρεις φράκτες μαζί σε συνάρτηση μιας εκ των μεταβλητών x, y.

3) Αν το μαθηματικό μοντέλο είναι $E(x) = -4x^2 + 240x$, $0 < x < 60$ να βρεθεί το μέγιστο εμβαδόν που μπορεί να καταλάβουν και οι τρεις φράκτες μαζί.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στο σύντομο test που προτείνεται.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΜΕ ΚΑΡΤΕΣ"

2.4.

Τριγωνομετρία

Τι καινούργιο υπάρχει στην παράγραφο

Με την ύλη της παραγράφου αυτής:

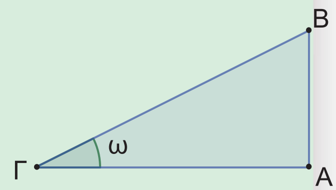
1) θα ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας μεταξύ 0° και 360° με τη βοήθεια του συστήματος συντεταγμένων

2) θα αποδείξουμε τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες ($εφx = \dfrac{ημx}{συνx}$, $σφx = \dfrac{συνx}{ημx}$, $ημ^2x + συν^2x = 1$) και θα υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας μεταξύ 0° και 360°, όταν ένας από αυτούς είναι γνωστός.

Απαραίτητες γνώσεις

Στο Γυμνάσιο μάθαμε:

1. τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογώνιου τριγώνου:
   - $ημω = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \dfrac{AB}{BΓ}$
   - $συνω = \dfrac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \dfrac{AΓ}{BΓ}$
   - $εφω = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \dfrac{AB}{BΓ}$



2. τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών: 30°, 45° και 60°:

ω	30^o	45^o	60^o
ημω	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
συνω	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2
εφω	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

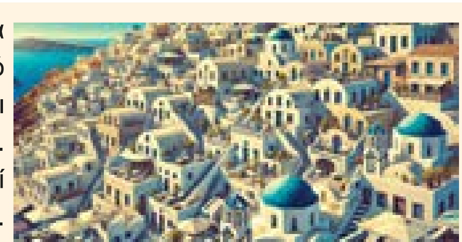
Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο (video): "ΙΣΤΟΡΙΕΣ ΗΜΙΤΟΝΟΥ"

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΜΕΤΡΗΣΗ ΓΩΝΙΑΣ"

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΑΕΡΟΣΤΑΤΟ"

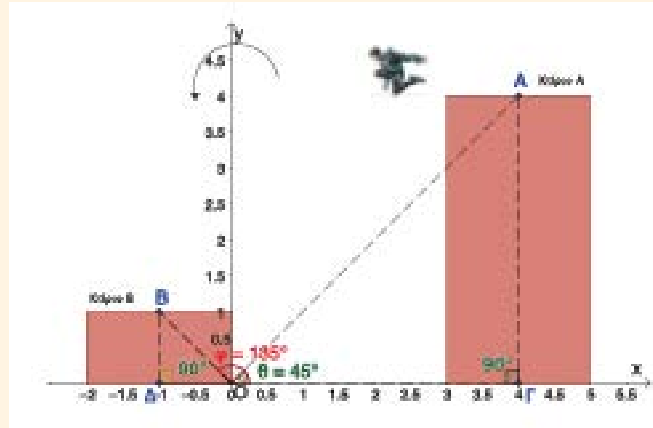
Εισαγωγική δραστηριότητα

Η Ειρήνη ακολούθησε στη Σαντορίνη τον φίλο της Νίκο, για να τον εμψυχώσει, καθώς συμμετέχει στον ετήσιο διαγωνισμό parkour. Καθώς όμως της αρέσουν τα Μαθηματικά, αποφασίζει να δει αν μπορεί να τα συνδυάσει με το συγκεκριμένο άθλημα. Ανεβαίνει στο καμπαναριό της εκκλησίας και παρατηρεί τις διάφορες θέσεις του Νίκου στις ταράτσες των σπιτιών. Ταυτόχρονα, θεωρεί κατάλληλο σύστημα Καρτεσιανών αξόνων με αρχή τη θέση της ίδιας (στο σημείο Ο), οπότε και βλέπει τις θέσεις του φίλου της μέσω συντεταγμένων.



(Δημιουργία AI: Chat GPT)

Α. Καθώς ο Νίκος βρίσκεται στο κτίριο Α, γνωρίζοντας τα μήκη των πλευρών … και …, η Ειρήνη χρησιμοποίησε τον τριγωνομετρικό αριθμό …………… και υπολόγισε τη γωνία ΑΟΓ, η οποία είναι τελικά … μοίρες (........ γωνία).



Β. Στη συνέχεια, παρατήρησε ότι: αν θεωρήσει τις συντεταγμένες του σημείου Α που είναι … και μετρήσει την απόσταση ΟΑ χρησιμοποιώντας το …………… Θεώρημα, θα έχει …… ……………………………………… ……………………………………........

Τότε, πειραματιζόμενη βρήκε ότι για το ημίτονο της οξείας γωνίας θ, ο λόγος της τεταγμένης του σημείου Α προς την απόσταση ΟΑ δίνει το σωστό αποτέλεσμα: …………………………….……
…………………………………...

Αντίστοιχα, έκανε το πείραμα για το συνημίτονο της γωνίας θ, με τον λόγο της τετμημένης του σημείου Α προς την απόσταση ΟΑ και βρήκε πάλι σωστό αποτέλεσμα: …………………………
…………………………………...

Τέλος, το επανάλαβε για την εφαπτομένη της γωνίας θ, χρησιμοποιώντας τον λόγο της τεταγμένης προς την τετμημένη του σημείου Α και βρήκε για άλλη μία φορά το σωστό αποτέλεσμα: …………
…………………………...

Έτσι, διατυπώνει την ακόλουθη εικασία, ως έναν άλλο τρόπο υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας: «Χρησιμοποιώ τις συντεταγμένες του σημείου Α (που βρίσκεται στην ………πλευρά της οξείας γωνίας ΓΟΑ), καθώς και την απόσταση ΟΑ για να ορίσω τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημθ = …….. , συνθ = …….., εφθ = …… ».

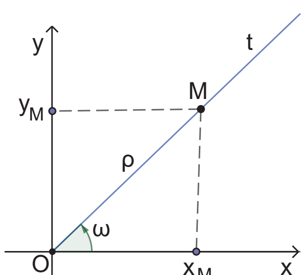
Γ. Στη συνέχεια, η Ειρήνη παρακολουθώντας με το βλέμμα της τον Νίκο να περνάει στο Κτίριο Β, αναρωτιέται αν η εικασία της θα είναι λειτουργική και στην περίπτωση όπου η γωνία είναι αμβλεία. Δοκιμάζει τη μέθοδό για τη γωνία ΓΟΒ και έχει:

Συντεταγμένες σημείου Β:…… , μήκος τμήματος ΟΒ:…… , ημφ = ... , συνφ = …, εφφ = …

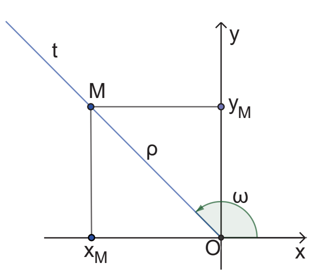
Τα αποτελέσματα που πήρε της έδωσαν μεγάλη χαρά, καθώς χρησιμοποιώντας πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών, επιβεβαίωσε πως ήταν τα σωστά!

Ας δούμε τι έχει προκύψει

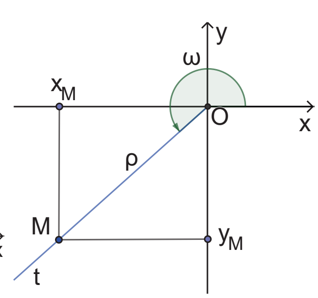
Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας μεταξύ 0ο και 360ο



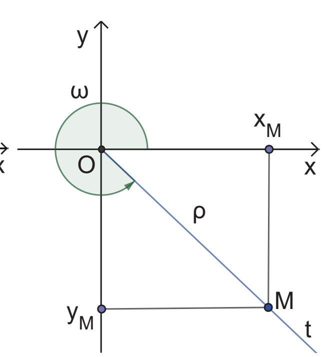
Σχ.1



Σχ.2



Σχ.3



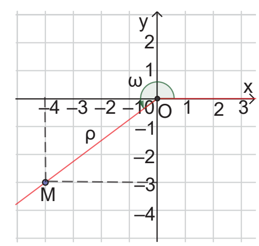
Σχ.4

Έστω γωνία ω με $0^\circ \le \omega \le 360^\circ$. Τοποθετούμε τη γωνία ω στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, ώστε να έχει **κορυφή** την αρχή των αξόνων O(0,0), **αρχική πλευρά** τον θετικό ημιάξονα Ox και **τελική πλευρά** Ot, η οποία κινείται κατά τη θετική φορά (δηλαδή αντίθετα με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού). Έστω $M(x_M, y_M)$ τυχαίο σημείο της τελικής πλευράς της γωνίας ω (διαφορετικό του O) και $(OM) = \rho$ η απόσταση του σημείου M από την αρχή των αξόνων. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα σε ένα από τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται προκύπτει ότι: $\rho^2 = |x_M|^2 + |y_M|^2$ που σημαίνει $\rho = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} > 0$
Ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω: ημίτονο (ημω), συνημίτονο (συνω), εφαπτομένη (εφω), συνεφαπτομένη (σφω) ως εξής:

- $\text{ημω} = \dfrac{y_M}{\rho} \left(= \dfrac{\text{τεταγμένη του σημείου M}}{\text{απόσταση του M από το O}} \right)$
- $\text{συνω} = \dfrac{x_M}{\rho} \left(= \dfrac{\text{τετμημένη του σημείου M}}{\text{απόσταση του M από το O}} \right)$
- $\text{εφω} = \dfrac{y_M}{x_M} \left(= \dfrac{\text{τεταγμένη του σημείου M}}{\text{τετμημένη του σημείου M}} \right), x_M \ne 0$
- $\text{σφω} = \dfrac{x_M}{y_M} \left(= \dfrac{\text{τετμημένη του σημείου M}}{\text{τεταγμένη του σημείου M}} \right), y_M \ne 0$

Οι παραπάνω ορισμοί είναι ανεξάρτητοι από την επιλογή του σημείου M.

Σημείωση: Στη διεθνή βιβλιογραφία: ημx: sinx, συνx: cosx, εφx: tanx, σφx: cotx



Για παράδειγμα, αν είναι $M(-4,-3)$, έχουμε $\rho^2 = |-4|^2 + |-3|^2$ που σημαίνει $\rho^2 = 16 + 9 = 25$ που σημαίνει $\rho = \sqrt{25} = 5$ οπότε:

$\text{ημω} = \dfrac{-3}{5} = -\dfrac{3}{5}$, $\text{συνω} = \dfrac{-4}{5} = -\dfrac{4}{5}$, $\text{εφω} = \dfrac{-3}{-4} = \dfrac{3}{4}$ και $\text{σφω} = \dfrac{-3}{-4} = \dfrac{3}{4}$

Σχόλια

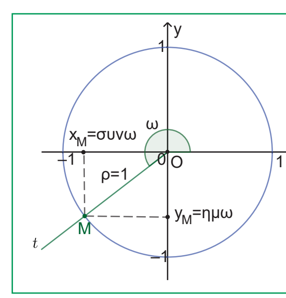
1) Για τις γωνίες $\omega = 90^\circ$ και $\omega = 270^\circ$ δεν ορίζεται η εφαπτομένη (γιατί;)

2) Για τις γωνίες $\omega = 0^\circ$ και $\omega = 180^\circ$ δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη (γιατί;)

3) Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας είναι ανεξάρτητοι από την επιλογή του σημείου M (γιατί;)

Παρατηρήσεις

1. Οι παραπάνω ορισμοί του ημίτονου και του συνημίτονου μιας γωνίας ω, στην επόμενη τάξη, θα τροποποιηθούν. Αφού οι ορισμοί είναι ανεξάρτητοι από την επιλογή του σημείου M (αρκεί να είναι διαφορετικό του O(0,0)), αν επιλέξουμε ως σημείο M το σημείο που η τελική πλευρά της γωνίας τέμνει τον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα 1 (μοναδιαίος κύκλος), τότε η απόσταση του σημείου M από το O είναι ρ = (OM) =1. Τον κύκλο αυτόν θα τον αποκαλούμε **τριγωνομετρικό κύκλο**. Έτσι, οι ορισμοί του ημιτόνου και του συνημιτόνου της γωνίας ω γίνονται:



$$\text{ημω} = \frac{y_M}{1} = y_M \text{ (η τεταγμένη του σημείου M)}, \quad \text{συνω} = \frac{x_M}{1} = x_M \text{ (η τετμημένη του σημείου M)}$$

2. Από το πρόσημο των συντεταγμένων του σημείου M της τελικής πλευράς της γωνίας ω, ανάλογα σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται, προκύπτουν τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	1ο τεταρτημόριο	2ο τεταρτημόριο	3ο τεταρτημόριο	4ο τεταρτημόριο
ημω	+	+	–	–
συνω	+	–	–	+
εφω	+	–	+	–
σφω	+	–	+	–

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ"

Για παράδειγμα, η παράσταση $A = ημ100^\circ \cdot συν220^\circ - εφ110^\circ \cdot σφ290^\circ$ έχει αρνητική τιμή αφού:

$$ημ100^o > 0\,,\ συν220^o < 0\,,\ εφ110^o < 0\,,\ σφ290^o < 0$$

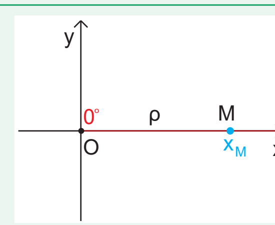
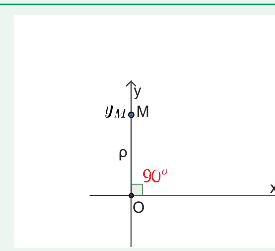
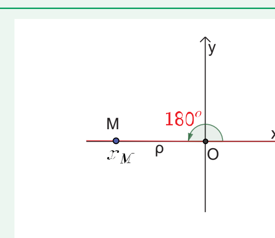
3. Τριγωνομετρικοί αριθμοί μερικών γνωστών γωνιών:

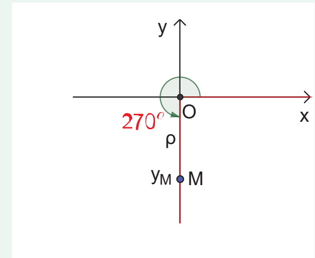
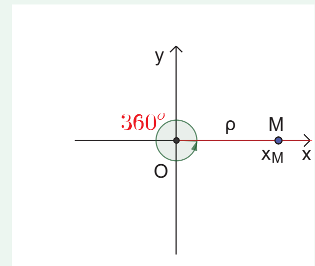
Γωνία	30^o	45^o	60^o
Ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Εφαπτόμενη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Συνεφαπτόμενη	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. Επειδή για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει: $|y_M| \le ρ$ και $|x_M| \le ρ$ που σημαίνει $\frac{|y_M|}{ρ} \le 1$ και $\frac{|x_M|}{ρ} \le 1$ που σημαίνει $\left|\frac{y_M}{ρ}\right| \le 1$ και $\left|\frac{x_M}{ρ}\right| \le 1$ που σημαίνει:

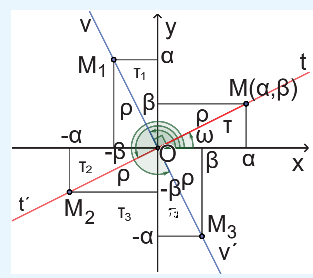
$|ημω| \le 1$ δηλαδή $-1 \le ημω \le 1$ και $|συνω| \le 1$ δηλαδή $-1 \le συνω \le 1$ για οποιαδήποτε γωνία ω.

5. ***Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών: 0^o, 90^o, 180^o, 270^o, 360^o***

Μέτρο γωνίας	Τριγωνομετρικοί αριθμοί	Σύστημα συντεταγμένων
$ω = 0^\circ$	• $ημ0^\circ = \frac{y_M}{ρ} = \frac{0}{ρ} = 0$ • $συν0^\circ = \frac{x_M}{ρ} = \frac{x_M}{x_M} = 1$ • $εφ0^\circ = \frac{y_M}{x_M} = \frac{0}{x_M} = 0$ • $σφ0^\circ$: δεν ορίζεται	
$ω = 90^\circ$	• $ημ90^\circ = \frac{y_M}{ρ} = \frac{y_M}{y_M} = 1$ • $συν90^\circ = 0$ • $εφ90^\circ$: δεν ορίζεται • $σφ90^\circ = \frac{x_M}{y_M} = \frac{0}{y_M} = 0$	
$ω = 180^\circ$	• $ημ180^\circ = \frac{y_M}{ρ} = \frac{0}{-y_M} = 0$ • $συν180^\circ = \frac{x_M}{ρ} = \frac{x_M}{-x_M} = -1$ • $εφ180^\circ = \frac{y_M}{x_M} = \frac{0}{x_M} = 0$ • $σφ180^\circ$: δεν ορίζεται	

$\omega = 270^\circ$	• $\eta\mu 270^\circ = \dfrac{y_M}{\rho} = \dfrac{y_M}{-y_M} = -1$ • $\sigma\upsilon\nu 270^\circ = \dfrac{x_M}{\rho} = \dfrac{0}{\rho} = 0$ • $\varepsilon\varphi 270^\circ$: δεν ορίζεται • $\sigma\varphi 270^\circ = \dfrac{x_M}{y_M} = \dfrac{0}{x_M} = 0$	
$\omega = 360^\circ$	• $\eta\mu 360^\circ = \dfrac{y_M}{\rho} = \dfrac{0}{\rho} = 0$ • $\sigma\upsilon\nu 360^\circ = \dfrac{x_M}{\rho} = \dfrac{x_M}{x_M} = 1$ • $\varepsilon\varphi 360^\circ = \dfrac{y_M}{x_M} = \dfrac{0}{x_M} = 0$ • $\sigma\varphi 360^\circ$: δεν ορίζεται	

Σχόλια



Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε γωνία $\widehat{xOM} = \omega$ στο 1ο τεταρτημόριο, όπου M σημείο της τελικής της πλευράς Ot, με συντεταγμένες $M(\alpha,\beta)$ με $\alpha,\beta > 0$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο που σχηματίζεται προκύπτει ότι $(OM) = \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > 0$. Θεωρούμε την κάθετη ευθεία vv' στην τελική πλευρά της γωνίας ω στο σημείο O και έστω Ot' η αντικείμενη ημιευθεία της Ot. Στις ημιευθείες Ov, Ot' και Ov' θεωρούμε σημεία M_1, M_2 και M_3 στο 2ο ,3ο και 4ο τεταρτημόριο αντίστοιχα, έτσι ώστε $(OM_1) = (OM_2) = (OM_3) = \rho$.

Προφανώς έχουμε $\widehat{xOM_1} = 90^\circ + \omega$, $\widehat{xOM_2} = 180^\circ + \omega$ και $\widehat{xOM_3} = 270^\circ + \omega$.

Καθένα από τα ορθογώνια τρίγωνα τ_1, τ_2 και τ_3 είναι ίσα με το τρίγωνο τ, αφού έχουν τις υποτείνουσες και μια οξεία γωνία μία προς μία ίσες. Άρα θα ισχύει: $M_1(-\beta,\alpha)$, $M_2(-\alpha,-\beta)$ και $M_3(\beta,-\alpha)$. Οπότε θα ισχύει:

- $\eta\mu(90^\circ + \omega) = \dfrac{\alpha}{\rho} = \sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\upsilon\nu(90^\circ + \omega) = \dfrac{-\beta}{\rho} = -\eta\mu\omega$, $\varepsilon\varphi(90^\circ + \omega) = \dfrac{\alpha}{-\beta} = -\sigma\varphi\omega$,

  $\sigma\varphi(90^\circ + \omega) = \dfrac{-\beta}{\alpha} = -\varepsilon\varphi\omega$

- $\eta\mu(180^\circ + \omega) = \dfrac{-\beta}{\rho} = -\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = \dfrac{-\alpha}{\rho} = -\sigma\upsilon\nu\omega$, $\varepsilon\varphi(180^\circ + \omega) = \dfrac{-\beta}{-\alpha} = \varepsilon\varphi\omega$,

  $\sigma\varphi(180^\circ + \omega) = \dfrac{-\alpha}{-\beta} = \sigma\varphi\omega$

- $\eta\mu(270^\circ + \omega) = \dfrac{-\alpha}{\rho} = -\sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\upsilon\nu(270^\circ + \omega) = \dfrac{\beta}{\rho} = \eta\mu\omega$, $\varepsilon\varphi(270^\circ + \omega) = \dfrac{-\alpha}{\beta} = -\sigma\varphi\omega$,

  $\sigma\varphi(270^\circ + \omega) = \dfrac{\beta}{-\alpha} = -\varepsilon\varphi\omega$

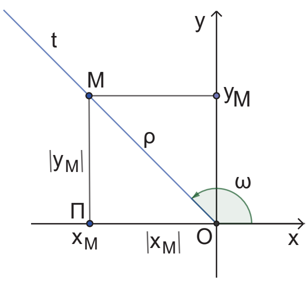
Για παράδειγμα, $\eta\mu 120^\circ = \eta\mu(90^\circ + 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 210^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\varepsilon\varphi 300^\circ = \varepsilon\varphi(270^\circ + 30^\circ) = -\sigma\varphi 30^\circ = -\sqrt{3}$

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. $ημ^2ω+συν^2ω=1$ (1), για κάθε γωνία ω

Απόδειξη



Αν $M(x_M,y_M)$ τυχαίο σημείο της τελικής πλευράς της γωνίας ω (διαφορετικό του Ο) και ρ η απόσταση του Μ από το Ο. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΠΜ προκύπτει ότι $(ΟΠ)^2+(ΠΜ)^2=(ΟΜ)^2$ που σημαίνει $|x_M|^2+|y_M|^2=ρ^2$ δηλαδή $x_M{}^2+y_M{}^2=ρ^2$. Άρα:

$$ημ^2ω+συν^2ω=\left(\frac{y_M}{ρ}\right)^2+\left(\frac{x_M}{ρ}\right)^2=\frac{x_M{}^2+y_M{}^2}{ρ^2}=\frac{ρ^2}{ρ^2}=1$$

2. $εφω=\dfrac{ημω}{συνω}$ (2), για κάθε γωνία ω με $συνω\neq 0$ και $σφω=\dfrac{συνω}{ημω}$ (3), για κάθε γωνία ω με $ημω\neq 0$

Απόδειξη

Σύμφωνα με τον ορισμό της εφαπτόμενης και της συνεφαπτόμενης μιας γωνίας ω έχουμε:

$$εφω=\frac{y_M}{x_M}=\frac{\frac{y_M}{ρ}}{\frac{x_M}{ρ}}=\frac{ημω}{συνω}\ (\text{εφόσον } συνω\neq 0) \text{ και } σφω=\frac{x_M}{y_M}=\frac{\frac{x_M}{ρ}}{\frac{y_M}{ρ}}=\frac{συνω}{ημω}\ (\text{εφόσον } ημω\neq 0)$$

Σχόλια - Παρατηρήσεις

Από τις παραπάνω ταυτότητες προκύπτουν τα εξής:

1) Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $εφω\cdot σφω=\dfrac{ημω}{συνω}\cdot\dfrac{συνω}{ημω}$ που σημαίνει

$εφω\cdot σφω=1$ (4), για κάθε γωνία ω με $ημω\neq 0$ και $συνω\neq 0$

2) Διαιρώντας την σχέση (1) με $συν^2ω\neq 0$ έχουμε $\dfrac{ημ^2ω}{συν^2ω}+\dfrac{συν^2ω}{συν^2ω}=\dfrac{1}{συν^2ω}$ που σημαίνει

$εφ^2ω+1=\dfrac{1}{συν^2ω}$ που σημαίνει $συν^2ω=\dfrac{1}{1+εφ^2ω}$ (5)

3) Αντικαθιστώντας στη σχέση (5) όπου $συν^2ω=1-ημ^2ω$ έχουμε: $1-ημ^2ω=\dfrac{1}{1+εφ^2ω}$ που σημαίνει

$ημ^2ω=1-\dfrac{1}{1+εφ^2ω}$ που σημαίνει $ημ^2ω=\dfrac{εφ^2ω}{1+εφ^2ω}$ (6)

Ασκήσεις κατανόησης

Α. Με απάντηση

1) Να αντιστοιχίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών που αναφέρονται στη στήλη Α με το σωστό πρόσημο που αναφέρεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον παρακάτω πίνακα..

Στήλη Α	Στήλη Β
Α) $ημ50^\circ$	**1.** Θετικό
Β) $συν100^\circ$	
Γ) $εφ200^\circ$	**2.** Αρνητικό
Δ) $σφ300^\circ$	

Στήλη Α	Α	Β	Γ	Δ
Στήλη Β	1	2	1	2

2) Είναι σωστό ή λάθος ότι υπάρχει γωνία ω με:

1) $ημω = 1{,}001$ **2)** $συνω = \sqrt{λ^2+1}$, όπου λ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Απάντηση:

1) Είναι λάθος, διότι $1{,}001 > 1$.

2) Είναι λάθος διότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ ισχύει $λ^2+1>1$ που σημαίνει $\sqrt{λ^2+1}>1$.

Β. Με εξάσκηση

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

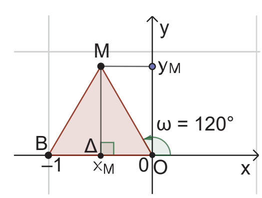
Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω;

Με τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, όπως τους ορίσαμε με τη βοήθεια συστήματος συντεταγμένων και με τις ταυτότητες που αποδείξαμε, θα υπολογίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών μεταξύ 0º και 360º, όταν ένας από αυτούς είναι γνωστός. Θα υπολογίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών στο καρτεσιανό επίπεδο και θα αποδείξουμε τριγωνομετρικές ταυτότητες

Λυμενες Εφαρμογες

Εφαρμογη 1

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΟΜΒ πλευράς 1, στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xOy όπως φαίνεται στο σχήμα. Με βάση το σχήμα αυτό να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 120°.



Λυση

Έχουμε $\widehat{xOM} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΟΜΒ το ύψος είναι και διάμεσος, άρα Δ είναι το μέσο της ΟΒ. Αν $M(x_M, y_M)$

ισχύει $x_M = -\frac{1}{2}$. Επειδή $ΜΔ = \sqrt{(ΟΜ)^2 - (ΟΔ^2)} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ θα είναι $y_M = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Οπότε $ημ120^\circ = \frac{y_M}{(OM)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $συν120^\circ = \frac{x_M}{(OM)} = -\frac{1}{2}$, $εφ120^\circ = \frac{y_M}{x_M} = -\sqrt{3}$, $σφ120^\circ = \frac{x_M}{y_M} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Εφαρμογη 2

Έστω γωνία ω με $90^\circ < ω < 180^\circ$ με $ημω = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω. και η τιμή της παράστασης $A = \dfrac{3ημω - \frac{3}{2}συνω}{2εφω - ημ^2ω - συν^2ω}$.

Λυση

Επειδή $90^\circ < ω < 180^\circ$ ισχύει συνω < 0. Άρα $συνω = -\sqrt{1-ημ^2ω} = -\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = -\frac{2}{3}$,

$εφω = \frac{ημω}{συνω} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $σφω = \frac{1}{εφω} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Οπότε $A=\dfrac{3\eta\mu\omega-\dfrac{3}{2}\sigma\upsilon\nu\omega}{2\varepsilon\varphi\omega-\eta\mu^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega}=\dfrac{3\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}-\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)}{2\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)-1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{-\sqrt{5}-1}=-1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Έστω γωνία ω με $270^\circ<\omega<360^\circ$ με $\varepsilon\varphi\omega=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω και η τιμή της παράστασης $B=-4058\cdot\eta\mu\omega-\sigma\varphi^2\omega$.

ΛΥΣΗ

Επειδή $270^\text{o}<\omega<360^\text{o}$ ισχύει συνω > 0 και ημω < 0.

Άρα $\sigma\upsilon\nu\omega=\sqrt{\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta\mu\omega=-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}=-\dfrac{1}{2}$ και $\sigma\varphi\omega=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\omega}=-\sqrt{3}$

Οπότε $B=-4058\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)-\left(-\sqrt{3}\right)^2=2029-3=2026$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να αποδείξετε ότι: **α)** $1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{1+\eta\mu\omega}=\eta\mu\omega$ **β)** $\varepsilon\varphi^2\omega-\eta\mu^2\omega=\varepsilon\varphi^2\omega\cdot\eta\mu^2\omega$

ΛΥΣΗ

α) $1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{1+\eta\mu\omega}=\dfrac{(1+\eta\mu\omega)-\sigma\upsilon\nu^2\omega}{1+\eta\mu\omega}=\dfrac{(1+\eta\mu\omega)-(1-\eta\mu^2\omega)}{1+\eta\mu\omega}=\dfrac{\eta\mu\omega+\eta\mu^2\omega}{1+\eta\mu\omega}=\dfrac{\eta\mu\omega(1+\eta\mu\omega)}{1+\eta\mu\omega}=\eta\mu\omega$

β) Για να ισχύει η $\varepsilon\varphi\omega-\eta\mu^2\omega=\varepsilon\varphi^2\omega\cdot\eta\mu^2\omega$ αρκεί να ισχύει η $\dfrac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}-\eta\mu^2\omega=\dfrac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}\cdot\eta\mu^2\omega$ ή

$\dfrac{\eta\mu^2\omega-\eta\mu^2\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}=\dfrac{\eta\mu^4\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$ ή $\eta\mu^2\omega\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\omega\right)=\eta\mu^4\omega$ ή $\eta\mu^2\omega\cdot\eta\mu^2\omega=\eta\mu^4\omega$ ή

$\eta\mu^4\omega=\eta\mu^4\omega$ που είναι αληθής.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΕΙΔΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΓΩΝΙΩΝ ΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ"

Ασκήσεις - Προβλήματα

1) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης $A=\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu30^\circ-\sigma\upsilon\nu^2 45^\circ+\varepsilon\varphi^4 60^\circ-\varepsilon\varphi^5 0^\circ-\eta\mu270^\circ$.

2) **α)** Να δείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu45^\text{o}-\eta\mu30^\text{o}}{\sigma\upsilon\nu45^\text{o}+\sigma\upsilon\nu60^\text{o}}=3-2\sqrt{2}$

β) Να επαληθεύσετε τις ισότητες: **i)** $\sigma\upsilon\nu60^\text{o}=\sigma\upsilon\nu^2 30^\text{o}-\eta\mu^2 30^\text{o}$, **ii)** $\eta\mu60^\text{o}=2\eta\mu30^\text{o}\cdot\sigma\upsilon\nu30^\text{o}$

3) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$A=\dfrac{\left(2\alpha\sigma\upsilon\nu60^\circ\right)^2-\left(\beta\sigma\varphi45^\circ\right)^2+\left(3\alpha\beta\eta\mu0^\circ\right)^2}{\left(5\alpha\sigma\upsilon\nu90^\circ\right)^2+2\alpha\eta\mu30^\circ-2\beta\sigma\upsilon\nu^2 45^\circ}$, $B=\dfrac{\sigma\upsilon\nu180^\circ-\varepsilon\varphi60^\circ}{\eta\mu90^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu360^\circ+\dfrac{1}{\sigma\varphi60^\circ}}$

4) **α)** Δίνεται $\sigma\upsilon\nu\omega=0{,}6$ όπου $0^\text{o}<\omega<90^\text{o}$. Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

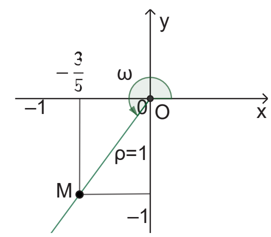
β) Δίνεται $\eta\mu\omega=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ και $90^\text{o}<\omega<180^\text{o}$. Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

γ) Δίνεται $εφω = -\dfrac{3}{4}$ και $270^\circ < ω < 360^\circ$. Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς

5) **α)** Αν $6ημ^2ω + ημω - 1 = 0$ και $180^\circ < ω < 270^\circ$, να βρεθεί το συνω.

β) Αν $2συν^2ω - 5συνω + 2 = 0$ και $270^\circ < ω < 360^\circ$, να βρεθεί η σφω.

6) Δίνεται γωνία ω και $M\left(-\dfrac{3}{5}, 1\right)$ σημείο της τελική της πλευράς.



α) Να δικαιολογήσετε γιατί $ημω = -\dfrac{3}{5}$.

β) Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

γ) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης: $A = \dfrac{ημω + συνω}{εφω + σφω}$.

7) Να αποδείξετε ότι για:

α) $ημ^4ω + συν^4ω = 1 - 2ημ^2ω \cdot συν^2ω$ **β)** $\dfrac{ημω}{συνω} + \dfrac{συνω}{ημω} = \dfrac{1}{ημω \cdot συνω}$

γ) $\dfrac{εφω + σφθ}{σφω + εφθ} = \dfrac{εφω}{εφθ}$ **δ)** $(1 + ημω + συνω)^2 = 2(1 + συνω) \cdot (1 + ημω)$

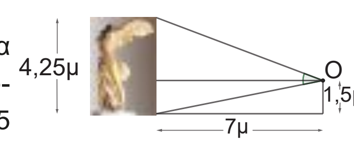
8) Απλοποιήστε τις παραστάσεις:

i) $A = \sqrt{1 - ημω} \cdot \sqrt{1 + ημω}$, **ii)** $B = \dfrac{εφω \cdot συνω - σφω \cdot ημω}{ημω - συνω}$ **iii)** $Γ = ημω \cdot συν^2ω + ημ^3ω$

9) Να υπολογίσετε σύντομα την τιμή των παραστάσεων:

i) $A = \dfrac{ημx + συνx}{ημx - συνx}$ αν $εφx = 3$, **ii)** $B = \dfrac{ημx \cdot συνx + 1}{ημx \cdot συνx - 1}$ αν $εφx = 2$

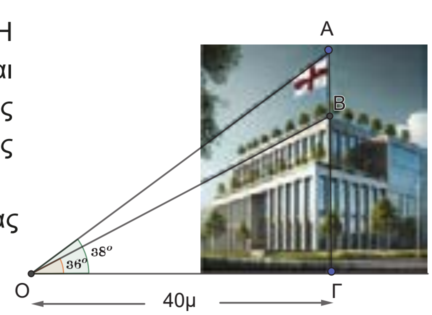
10) Στο Μουσείο του Λούβρου, ένας γλύπτης μελετάει το Ελληνικό άγαλμα «η Νίκη της Σαμοθράκης», ύψους 4,25 μέτρων, που βρίσκεται σε απόσταση 7 μέτρων από τη θέση του. Το μάτι του βρίσκεται σε ύψος 1,5 μέτρων από το δάπεδο της αίθουσας (σημείο Ο).



i) Ποιες γωνίες του σχήματος συνθέτουν τη γωνία α υπό την οποία ο γλύπτης «βλέπει» το άγαλμα.

ii) Χρησιμοποιώντας κατάλληλους τριγωνομετρικούς αριθμούς, βρείτε τη γωνία α (χρησιμοποιήστε υπολογιστική μηχανή/κομπιουτεράκι).

11) Ένας παρατηρητής βρίσκεται 200 μέτρα μακριά από ένα κτίριο. Η γωνία ανύψωσης στη βάση του ιστού της σημαίας που βρίσκεται στην ταράτσα του κτιρίου είναι 36°, ενώ η γωνία ανύψωσης στην κορυφή του ιστού της σημαίας είναι 38°. Χρησιμοποιώντας κατάλληλους τριγωνομετρικούς αριθμούς:



i) να βρείτε την απόσταση της κορυφής Α του ιστού της σημαίας από το έδαφος,

ii) να βρεθεί το ύψος του ιστού της σημαίας.

Δίνεται ότι: $ημ36^\circ \simeq 0,59$, $συν36^\circ \simeq 0,81$, $εφ36^\circ \simeq 0,73$

$ημ38^\circ \simeq 0,62$, $συν38^\circ \simeq 0,79$, $εφ38^\circ \simeq 0,78$

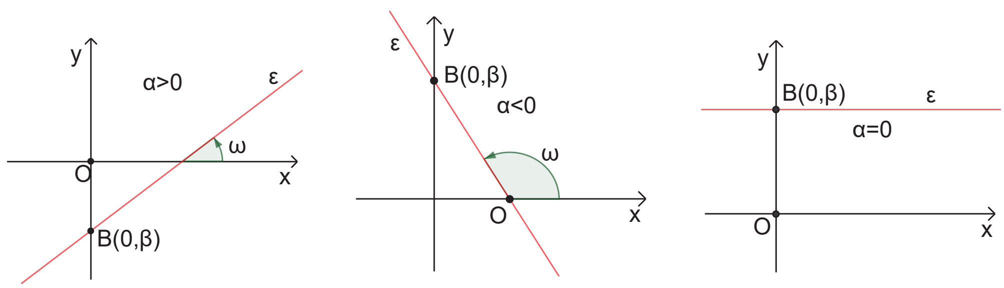
Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στο σύντομο test που προτείνεται.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο (διαδραστικό κείμενο): "ΜΕΤΡΗΣΗ ΥΨΟΥΣ"

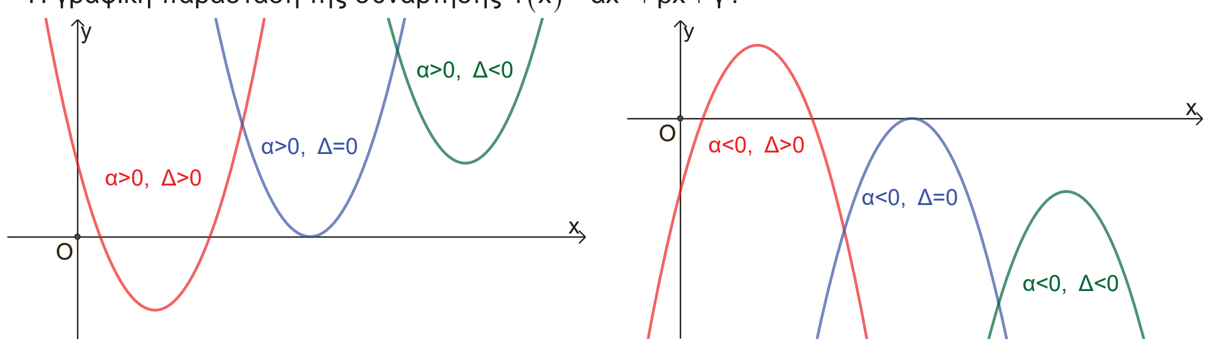
ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

- **Πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής** ονομάζουμε μια σχέση (αντιστοιχία) μεταξύ των στοιχείων ενός συνόλου Α που είναι υποσύνολο των πραγματικών αριθμών και του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, αν **κάθε** στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται **σε ένα ακριβώς** στοιχείο του $\mathbb{R}$. Συμβολίζεται $f: A \to \mathbb{R}$ και μπορούμε να την αναπαραστήσουμε με: βελοδιάγραμμα, γραφική παράσταση, γράφημα, τύπο (κανόνα) και πεδίο ορισμού, λεκτικά και πίνακα τιμών.

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$:

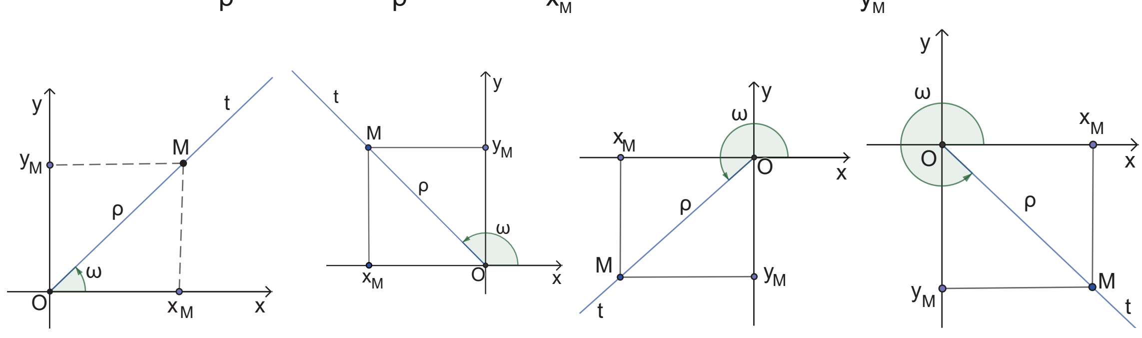


- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$:



- Οι **τριγωνομετρικοί αριθμοί** γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$ ορίζονται ως εξής:

$$\eta\mu\omega = \frac{y_M}{\rho} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x_M}{\rho} \quad , \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{y_M}{x_M} \quad , \quad x_M \neq 0 \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega = \frac{x_M}{y_M} \quad , \quad y_M \neq 0$$



- Για κάθε γωνία ω ισχύουν:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1, \ \varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \ \text{με} \ \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0, \ \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \ \text{με} \ \eta\mu\omega \neq 0$$

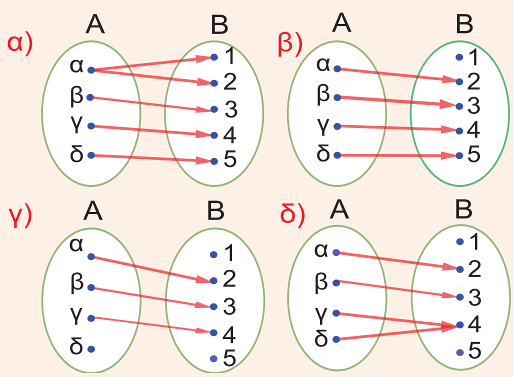
$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}, \ \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \ \text{με} \ \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$$

Κριτηριο Αυτοαξιολογησης

Να λύσετε το ακόλουθο κριτήριο αξιολόγησης σε 90΄

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Ποια από τα παρακάτω βελοδιαγράμματα αντιστοιχούν σε συναρτήσεις μεταξύ των στοιχείων των συνόλων Α και Β; Στη περίπτωση των συναρτήσεων να γράψετε τα πεδία ορισμού, τα σύνολα αφίξεως, τα σύνολα τιμών, καθώς και τα γραφήματά τους.



Α.2 *Να χαρακτηρίσετε τους παρακάτω ισχυρισμούς ως Αληθείς ή Ψευδείς αιτιολογώντας σύντομα την απάντησή σας.*

1) Η συνάρτηση $f(x)=(\alpha^2+1)x+2026$, $\alpha\in\mathbb{R}$ έχει γραφική παράσταση ευθεία γραμμή που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.

2) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=4x^2+4x+1$ είναι παραβολή που τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο σημεία.

3) Αν η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ παρουσιάζει μέγιστο τότε α > 0.

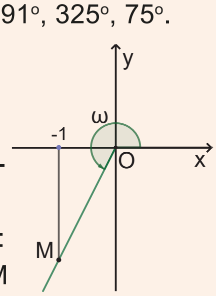
4) Η συνάρτηση $f(x)=3x^2-12x+10$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για x = 2.

5) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-2x+3$, έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=-1$

Α.3 Να βρείτε τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών 115°, 191°, 325°, 75°.

ΘΕΜΑ Β

Β.1 Στο διπλανό σχήμα ισχύει: $\varepsilon\varphi\omega=\frac{3}{4}$. Αν η τετμημένη του σημείου Μ είναι –1, να υπολογίσετε:

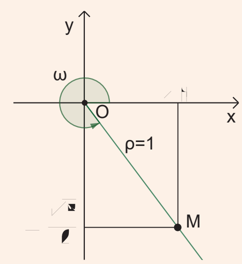


Α) Την τεταγμένη του σημείου Μ

Β) Το ημω και το συνω

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΣΤΑΥΡΟΛΕΞΟ"

Β.2 Στο διπλανό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται το σημείο $M\left(x_M,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ που απέχει από την αρχή των αξόνων $\rho=(OM)=1$ και η γωνία $\widehat{xOM}=\omega$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθούν:



α) οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω και

β) η τιμή της παράστασης:

$$A=2026+(\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega)^2+\frac{\varepsilon\varphi\omega}{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Δυο σώματα Α και Β αρχίζουν να κινούνται στην ίδια ευθεία κατά την ίδια φορά με σταθερές ταχύτητες με μέτρο $v_1=0{,}5$ m/s και $v_2=0{,}25$ m/s αντίστοιχα. Η αρχική τους απόσταση είναι 10m. Να υπολογίσετε:

α) μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν,

β) το διάστημα που θα διανύσει το κάθε σώμα από την αρχική του θέση μέχρι το σημείο συνάντησής τους,

γ) να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις στα ερωτήματα Α) και Β) γραφικά, δηλαδή σχεδιάζοντας στο ίδιο σύστημα αξόνων (όχι κατ' ανάγκη «κανονικό»), τις γραφικές παραστάσεις διαστήματος-χρόνου των δύο σωμάτων και βρίσκοντας τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-1$ και $g(x)=2x+2$.

α) Με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra ή οποιουδήποτε άλλου λογισμικού να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων Oxy.

β) Να βρεθούν:

- **i)** τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x,
- **ii)** τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g,

γ)

- **i)** να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f,
- **ii)** να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

Κεφάλαιο 3ο

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Λέξεις κλειδιά: *ταυτότητες*

Ιστορικό σημείωμα

Ο Αρχαίος Έλληνας μαθηματικός **Ευκλείδης** από την Αλεξάνδρεια (350 π.Χ. – 270 π. Χ.) κατέχει μια διακεκριμένη θέση στην ιστορία των Μαθηματικών, καθώς είναι ο πρώτος που στο περίφημο έργο του «Στοιχεία», θεμελιώνει ένα αυστηρά δομημένο και συνεκτικό σύστημα προτάσεων (Θεωρημάτων, Πορισμάτων), τις οποίες αποδεικνύει χρησιμοποιώντας ένα σύνολο Ορισμών, Εννοιών και πέντε μόνο αρχικών αναπόδεικτων προτάσεων (Αξιώματα/Αιτήματα). Λόγω της τεράστιας συνεισφοράς του στην επιστήμη των Μαθηματικών αναφέρεται ως ο «Πατέρας της Γεωμετρίας».

Τὸ δεύτερον βιβλίον περιέχει δύο ὁρισμούς καί δεκατέσσερα θεωρήματα καί προβλήματα, τά ὁποία ἀποτελοῦν ἐφαρμογάς τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος. Δι' αὐτῶν σπουδάζεται ἡ κατασκευή τετραγώνου ἀπό τετράγωνα καί ὀρθογώνια εἰς ποικίλους συνδυασμούς, διά προσθέσεως, ἀφαιρέσεως κλπ. χρησιμοποιημένου πολύ τοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος, ὅπερ καλεῖται γνώμων. Ὁ δεύτερος ὁρισμός τοῦ βιβλίου τούτου ἀφορᾷ εἰς τόν γνώμονα, ὅστις εἶναι εὕρημα τοῦ Ἀναξίμανδρου (... εὗρε δέ Ἀναξίμανδρος καί γνώμονα πρῶτος καί ἔστησεν ἐπί τῶν σκιοθήρων ἐν Λακεδαίμονι· Διογ. Λαέρτιος ΙΙ 1-2 (εὗρε δέ καί τόν γνώμονα πρῶτος ὁ Ἀναξίμανδρος καί ἔστηκεν αὐτόν πρίς μέτρησιν τῆς σκιᾶς εἰς τό ἡλιακόν ὡρολόγιον τῆς Λακεδαίμονος (Σπάρτης)). Τό βιβλίον τοῦτο περιέχει καί ἐφαρμογήν τῆς γεωμετρίας εἰς τήν Ἄλγεβραν καί ἀποδίδεται κατά τό μέγιστον μέρος εἰς τούς Πυθαγορείους. Τά πρῶτα δέκα θεωρήματα ἀφοροῦν εἰς ἀλγεβρικάς ταὐτότητας, τάς ὁποίας δυνάμεθα νά παραστήσωμεν ὡς ἀκολούθως, ἐάν διά τῶν γραμμάτων α, β, γ,... νοήσωμεν τμήματα εὐθειῶν γραμμῶν ἦτοι:

1. $\alpha(\beta+\gamma+\delta)=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta$
2. Εάν $\beta+\gamma=\alpha$ τότε $\alpha\beta+\alpha\gamma=\alpha^2$
3. $(\alpha+\beta)\alpha=\alpha^2+\alpha\beta$
4. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$
5. $\alpha\beta+\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^2=\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$
6. $(2\alpha+\beta)\beta+\alpha^2=(\alpha+\beta)^2$
7. $(\alpha+\beta)^2+\alpha^2=2(\alpha+\beta)\alpha+\beta^2$
8. $4(\alpha+\beta)\alpha+\beta^2=\left[(\alpha+\beta)+\alpha\right]^2$
9. $\alpha^2+\beta^2=2\left[\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^2\right]$
10. $(2\alpha+\beta)^2+\beta^2=2\left[\alpha^2+(\alpha+\beta)^2\right]$

Πηγή:
Ευάγγελος Σταμάτης, Ευκλείδου Γεωμετρία: «Στοιχεία», Εισαγωγή-Αρχαίο Κείμενο-Μετάφραση (Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα 1975).

3.1

Αλγεβρικές ταυτότητες

Τι καινούργιο υπάρχει στην παράγραφο

Με την ύλη της παραγράφου αυτής:

1) θα αποδείξουμε τις ταυτότητες που σχετίζονται με τις παραστάσεις $(\alpha \pm \beta)^3$ και $\alpha^3 \pm \beta^3$.

2) θα χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες και τις ιδιότητες των νιοστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στον μετασχηματισμό αλγεβρικών παραστάσεων.

Απαραίτητες γνώσεις

Στο Γυμνάσιο μάθαμε:

1) να διερευνούμε, αποδεικνύουμε και ερμηνεύουμε γεωμετρικά τις ταυτότητες:

$$(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2, \quad \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο (video): "ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ"

2) να χρησιμοποιούμε ταυτότητες για τη μετατροπή αλγεβρικών παραστάσεων σε άλλη μορφή.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο (video): "ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ"

Σε προηγούμενο κεφάλαιο:

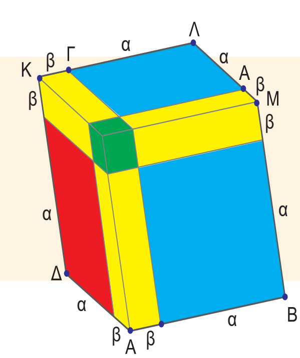
3) ορίσαμε ως νιοστή ρίζα του μη αρνητικού αριθμού α $(\alpha \geq 0)$ και συμβολίσαμε $\sqrt[\nu]{\alpha}$, τη μοναδική μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$ με ν θετικό ακέραιο αριθμό,

4) επεκτείναμε τις δυνάμεις και με ρητό εκθέτη. Συγκεκριμένα, αν μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος αριθμός, τότε για κάθε $\alpha > 0$ ορίζουμε ως $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$. Ειδικά αν μ και ν θετικοί ακέραιοι αριθμοί, τότε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$.

Εισαγωγική Δραστηριότητα

Δίνεται ο διπλανός κύβος με πλευρά α + β, όπου α και β πραγματικοί θετικοί αριθμοί. Μπορείτε να βρείτε τον όγκο του κύβου χρησιμοποιώντας τα στερεά που το αποτελούν; Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να επαληθευσετε το αποτέλεσμά σας και αλγεβρικά;

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο (video): "ΚΥΒΟΙ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ"



Ας δούμε τι έχει προκύψει

Ταυτότητες κύβου αθροίσματος και διαφοράς καθώς και αθροίσματος και διαφοράς κύβων

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν οι παρακάτω ταυτότητες:

$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \quad (1)$

$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 \quad (2)$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \quad (3)$

$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \quad (4)$

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Εφαρμόζοντας τα αναπτύγματα γνωστών ταυτοτήτων και την επιμεριστική ιδιότητα έχουμε:

1) $(\alpha+\beta)^3 = (\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta) = (\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^3+\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^2\alpha+\beta^3 =$

$= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

2) $(\alpha-\beta)^3 = (\alpha-\beta)^2\cdot(\alpha-\beta) = (\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha^3-\alpha^2\beta-2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^2\alpha-\beta^3 =$

$= \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

2ος τρόπος:

$$(\alpha-\beta)^3 = [\alpha+(-\beta)]^3 \overset{(1)}{=} \alpha^3+3\alpha^2(-\beta)+3\alpha(-\beta)^2+(-\beta)^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$$

3) $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3 = \alpha^3+\beta^3$

4) $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2-\alpha\beta^2-\beta^3 = \alpha^3-\beta^3$

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΤΟΥ PASCAL"

Ασκήσεις κατανόησης

Α. Με απάντηση:

1) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(1+x)^3$, **β)** $(1-y)^3$, **γ)** $(2x-3y)^3$, **δ)** $\left(\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)^3$

Απάντηση

α) $(1+x)^3 = 1^3+3\cdot1^2\cdot x+3\cdot1\cdot x^2+x^3 = 1+3x+3x^2+x^3$

β) $(1-y)^3 = 1-3y+3y^2-y^3$

γ) $(2x-3y)^3 = (2x)^3-3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2-(3y)^3 = 8x^3-3\cdot4x^2\cdot3y+3\cdot2x\cdot9y^2-27y^3 =$

δ) $\left(\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\alpha\right)^3+3\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2\beta+3\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\beta^2+\beta^3 = \frac{\alpha^3}{8}+\frac{3\alpha^2\beta}{4}+\frac{3\alpha\beta^2}{2}+\beta^3$

2) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) για $x\neq2$, $\frac{x^3-8}{x-2}$, **β)** για $\alpha\neq-\frac{2}{3}$, $\frac{27\alpha^3+8}{3\alpha+2}$ **γ)** $\frac{\alpha^3\beta^3-\beta^6}{\alpha^2-\beta^2}\div\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^4+\alpha^3\beta}$

Απάντηση

α) Για $x\neq2$, $\frac{x^3-8}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = x^2+2x+4$

β) Για $\alpha\neq-\frac{2}{3}$, $\frac{27\alpha^3+8}{3\alpha+2} = \frac{(3\alpha)^3+2^3}{3\alpha+2} = \frac{(3\alpha+2)\left[(3\alpha)^2-3\alpha\cdot2+2^2\right]}{3\alpha+2} = 9\alpha^2-6\alpha+4$

γ) Για κάθε τιμή των πραγματικών αριθμών α και β που ορίζεται η παράσταση ισχύει:

$$\frac{\alpha^3\beta^3-\beta^6}{\alpha^2-\beta^2}\div\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^4+\alpha^3\beta} = \frac{\beta^3(\alpha^3-\beta^3)}{\alpha^2-\beta^2}\div\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^3(\alpha+\beta)} = \frac{\beta^3\cancel{(\alpha-\beta)}\cancel{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}}{\cancel{(\alpha-\beta)}\cancel{(\alpha+\beta)}}\cdot\frac{\alpha^3\cancel{(\alpha+\beta)}}{\cancel{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}} = (\alpha\beta)^3$$

Β. Για εξάσκηση:

1) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) 1502^2-1498^2 **β)** $998\cdot1002$ **γ)** $\frac{(11,32)^2-(7,32)^2}{18,64}$

δ) $\dfrac{754^3-654^3}{754^2+754\cdot 654+654^2}$ ε) $\sqrt[5]{\dfrac{\left(2027^3-3\cdot 2027^2+3\cdot 2027-1\right)^2}{2026}}$

2) Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να ισχύουν οι ταυτότητες:

α) $(-x+y)^2=\dots$ β) $(\dots+\dots)^3=8\alpha^3+\dots+\dots+\beta^3$ γ) $8x^3-(\dots)^3=(2x-3y)(\dots+\dots+\dots)$

δ) $\dfrac{(\dots)^3+(\dots)^3}{x+y}=x^2-xy+y^2$ ε) $\dfrac{(\dots)^3-(\dots)^3}{9x^2+3xy+\dots}=\dots-\dots$

3) Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να ισχύουν οι ταυτότητες:

α) $\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}+\beta^{\frac{1}{2}}\right)=\dots-\dots$ β) $(\dots+\dots)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}-\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)=\alpha+\beta$

γ) $\left(\alpha^{\frac{1}{3}}-\beta^{\frac{1}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\dots\cdot\dots+\beta^{\frac{2}{3}}\right)=\dots-\dots$ δ) $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)(\dots+\dots+\dots)=x-y$

ε) $\dfrac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\alpha^{\frac{1}{3}}-\beta^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{\alpha^{\frac{2}{3}}+\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}}{\dots+\dots}$

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων, των ιδιοτήτων των νιοστών ριζών και των δυνάμεων με ρητό εκθέτη μετασχηματίζουμε αλγεβρικές παραστάσεις.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να ισχύουν οι ταυτότητες:

i) $(\mathbf{2x-3y})^3=\dots$ ii) $(-\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{2})^3=\dots$ iii) $(\mathbf{3}\boldsymbol{\alpha})^3-(-\mathbf{2}\boldsymbol{\beta})^3=\dots$ iv) $\left(\mathbf{x^2+\frac{y}{2}}\right)^3=\dots$

ΛΥΣΗ

i) $(2x-3y)^3=(2x)^3-3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2-(3y)^3=$

$=8x^3-3\cdot 4x^2\cdot 3y+3\cdot 2x\cdot 9y^2-27y^3=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$

ii) **1ος τρόπος:** $(-\alpha+2)^3=(-\alpha)^3+3(-\alpha)^2\cdot 2+3(-\alpha)\cdot 2^2+2^3=-\alpha^3+6\alpha^2-12\alpha+8$

2ος τρόπος: $(-\alpha+2)^3=(2-\alpha)^3=2^3-3\cdot 2^2\alpha+3\cdot 2\alpha^2-\alpha^3=8-12\alpha+6\alpha^2-\alpha^3$

iii) **1ος τρόπος:** $(3\alpha)^3-(-2\beta)^3=\left[(3\alpha)-(-2\beta)\right]\left[(3\alpha)^2+(3\alpha)(-2\beta)+(-2\beta)^2\right]=(3\alpha+2\beta)\left(9\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2\right)$

2ος τρόπος: $(3\alpha)^3-(-2\beta)^3=(3\alpha)^3+(2\beta)^3=\left[(3\alpha)+(2\beta)\right]\left[(3\alpha)^2-(3\alpha)(2\beta)+(2\beta)^2\right]=$

$=(3\alpha+2\beta)\left(9\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2\right)$

iv) $\left(x^2+\frac{y}{2}\right)^3=\left(x^2\right)^3+3\left(x^2\right)\frac{y}{2}+3x^2\left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^3=x^6+\frac{3}{2}x^2y+\frac{3}{4}x^2y^2+\frac{y^3}{8}$

Εφαρμογη 2

i) **Να αποδείξετε ότι** $\mathbf{x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)}$ **.**

ii) **Να βρείτε τη διαφορά των κύβων δύο αριθμών** $\mathbf{x,y}$ **με** $\mathbf{x>y}$ **, αν γνωρίζουμε πως η διαφορά τους είναι ίση με 5 και το γινόμενό τους ίσο με 10.**

Λυση

i) Έχουμε: $(x-y)^3+3xy(x-y)=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+3x^2y-3xy^2=x^3-y^3$.

ii) Εφαρμόζοντας το ερώτημα i) έχουμε $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=5^3+3\cdot10\cdot5=275$.

Εφαρμογη 3

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β με $\mathbf{\alpha,\beta\geq0}$ **να αποδειχθούν οι ισότητες:**

α) $\left(\boldsymbol{\alpha}^{\frac{1}{4}}-\boldsymbol{\beta}^{\frac{1}{4}}\right)\left(\boldsymbol{\alpha}^{\frac{1}{4}}+\boldsymbol{\beta}^{\frac{1}{4}}\right)=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}-\sqrt{\boldsymbol{\beta}}$ **β)** $\left(\boldsymbol{\alpha}^{\frac{1}{3}}+\boldsymbol{\beta}^{\frac{1}{3}}\right)\left(\boldsymbol{\alpha}^{\frac{2}{3}}-\boldsymbol{\alpha}^{\frac{1}{3}}\cdot\boldsymbol{\beta}^{\frac{1}{3}}+\boldsymbol{\beta}^{\frac{2}{3}}\right)=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$

Λυση

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha,\beta\geq0$ ισχύει:

α) $\left(\alpha^{\frac{1}{4}}-\beta^{\frac{1}{4}}\right)\left(\alpha^{\frac{1}{4}}+\beta^{\frac{1}{4}}\right)=\left(\alpha^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(\beta^{\frac{1}{4}}\right)^2=\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$

β) $\left(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}-\alpha^{\frac{1}{3}}\cdot\beta^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)=\left(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}\right)\left(\left(\alpha^{\frac{1}{3}}\right)^2-\alpha^{\frac{1}{3}}\cdot\beta^{\frac{1}{3}}+\left(\beta^{\frac{1}{3}}\right)^2\right)=\left(\alpha^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(\beta^{\frac{1}{3}}\right)^3=\alpha^{\frac{1}{3}\cdot3}+\beta^{\frac{1}{3}\cdot3}=\alpha+\beta$

Εφαρμογη 4

A) **Να δείξετε ότι:** $\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]}$

$\boldsymbol{=(\alpha+\beta+\gamma)\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\right)}$ **(ταυτότητα Euler)**

B) **Να δείξετε ότι:** **αν** $\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=0}$ **τότε** $\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma}$

Λυση

A) $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]=$

$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2+\gamma^2-2\alpha\gamma+\alpha^2\right)=$

$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma\right)=(\alpha+\beta+\gamma)\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\gamma\right)=$

$\alpha^3+\cancel{\alpha\beta^2}+\cancel{\alpha\gamma^2}-\cancel{\alpha^2\beta}-\alpha\beta\gamma-\cancel{\alpha^2\gamma}+\cancel{\beta\alpha^2}+\beta^3+\cancel{\beta\gamma^2}-\cancel{\alpha\beta^2}-\cancel{\beta^2}\gamma-\alpha\beta\gamma+$

$\cancel{\gamma\alpha^2}+\cancel{\gamma\beta^2}+\gamma^3-\alpha\beta\gamma-\cancel{\beta\gamma^2}-\cancel{\alpha\gamma^2}=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$

Β) Από το ερώτημα Α) προκύπτει ότι:
Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]=0$, οπότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=0$, οπότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$

Δραστηριότητα: Μπορείτε να αποδείξετε το ερώτημα Β) χωρίς να χρησιμοποιήσετε το ερώτημα Α);

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

Α. Αν $x+\frac{1}{x}=10$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις α) $x^2+\frac{1}{x^2}$ και β) $x^3+\frac{1}{x^3}$

Β. i) Να δείξετε ότι: $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

ii) Να βρείτε τα αναπτύγματα των παραστάσεων: α) $(\alpha-\beta+\gamma)^2$, β) $(\alpha+\beta-\gamma)^2$, γ) $(\alpha-\beta-\gamma)^2$

iii) Να γράψετε τη παράσταση $21+\sqrt{24}-\sqrt{128}-\sqrt{192}$ ως τέλειο τετράγωνο

ΛΥΣΗ

Α. α) $x+\frac{1}{x}=10$ οπότε $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=100$ δηλαδή $x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=100$ που σημαίνει

$x^2+\frac{1}{x^2}=100-2=98$

β) $x+\frac{1}{x}=10$ που οπότε $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=1000$ δηλαδή $x^3+3x^2\cdot\frac{1}{x}+3x\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=1000$ που σημαίνει $x^3+3\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}=1000$ επομένως $x^3+30+\frac{1}{x^3}=1000$ άρα

$x^3+\frac{1}{x^3}=1000-30=970$

Β. i) $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\left[(\alpha+\beta)+\gamma\right]^2=(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\cdot\gamma+\gamma^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2$

ii) α) $(\alpha-\beta+\gamma)^2=\left[\alpha+(-\beta)+\gamma\right]^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta+2\alpha\gamma-2\beta\gamma$

β) $(\alpha+\beta-\gamma)^2=\left[\alpha+\beta+(-\gamma)\right]^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma$

γ) $(\alpha-\beta-\gamma)^2=\left[\alpha+(-\beta)+(-\gamma)\right]=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

Γ. $21+\sqrt{24}-\sqrt{128}-\sqrt{192}=21+4\sqrt{6}-8\sqrt{2}-8\sqrt{3}=\sqrt{2}^2+\sqrt{3}^2+4^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}-2\cdot4\sqrt{2}-2\cdot4\sqrt{3}=$ $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-4\right)^2$. Μπορείτε να εφαρμόσετε άλλον τρόπο για να γράψετε την παράσταση αυτή ως τέλειο τετράγωνο;

Ασκήσεις – Προβλήματα

1) Να γίνουν οι πράξεις και να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\dfrac{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}-2}{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha,\beta\neq0$ και $\alpha\neq\beta$ **β)** $\dfrac{\alpha^2+\frac{1}{\alpha}}{\alpha+\frac{1}{\alpha}-1}$, $\alpha\neq0$ **γ)** $\dfrac{\frac{x}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{x^2}}{\frac{\alpha}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha,x\neq0$

δ) $\left(1+\frac{\alpha^3}{x^3}\right)\div\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\alpha}{x^3}\right)$, $x\neq0$, $x\neq-\alpha$

2) Να αποδείξετε τις ταυτότητες $(x+y)^3-(x-y)^3=2y(y^2+3x^2)$ και $(\alpha+2)^3-6(\alpha+1)^2=\alpha^3+2$.

3) **i)** Να αποδείξετε ότι $(\alpha+1)^3-(\alpha-1)^3=2(3\alpha^2+1)$. **ii)** Να υπολογιστεί το εξαγόμενο 101^3-99^3.

4) **i)** Να δείξετε ότι $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\alpha\beta$.

ii) Να βρείτε το αριθμό $x=\left(\dfrac{5^{-2026}+5^{2026}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{5^{-2026}-5^{2026}}{2}\right)^2$.

5) **i)** Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha+\beta}-\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$, $\alpha\neq-\beta$.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{2027^3+2026^3}{4053}-2027\cdot 2026$.

6) **i)** Για τους πραγματικούς αριθμούς $x,y\neq 0$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{x^3-y^3}{(x+y)^2-xy}=x-y$.

ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\dfrac{59^3-29^3}{88^2-59\cdot 29}$

7) **i)** Αν ισχύει $x+\dfrac{3}{x}=-4$, να υπολογίσετε την παράσταση $x^3+\dfrac{27}{x^3}$, $x\neq 0$.

ii) Να βρείτε τη διαφορά των κύβων δύο αριθμών α, β, με $\alpha>\beta$, αν γνωρίζετε ότι η διαφορά τους είναι ίση με 3 και το γινόμενό τους ίσο με 10.

8) Αν α, β θετικοί αριθμοί με β > α να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha^{-1}+\beta^{-1}}{(\alpha+\beta)^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{\alpha^{-2}+\beta^{-2}}{(\beta^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{(\beta-\alpha)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha\beta)^{-3}}=\alpha+\beta$.

9) **i)** Αν $\alpha\geq 0$ να αποδείξετε ότι $\left(\alpha^{\frac{5}{2}}-\alpha^2+\alpha^{\frac{3}{2}}-\alpha+\alpha^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}+1\right)=\alpha^3-1$.

ii) Αν $0\leq\alpha\neq 1$ να αποδείξετε ότι $\dfrac{\left(\alpha^{\frac{5}{2}}-\alpha^2+\alpha^{\frac{3}{2}}-\alpha+\alpha^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}+1\right)}{\alpha-1}=\alpha^2+\alpha+1$.

10) Αν $0<\alpha\neq 1$ να δείξετε ότι $\dfrac{1-\alpha^{-\frac{1}{2}}}{1+\alpha^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{\alpha^{\frac{1}{2}}+\alpha^{-\frac{1}{2}}}{\alpha-1}=\dfrac{2}{1-\alpha}$.

11) Αν $(x^3+y^3)^2=(x^2+y^2)^3$ με $x,y\neq 0$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2}{3}$.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε ότι:

Κύβος Αθροίσματος: $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ Κύβος Διαφοράς: $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

Άθροισμα Κύβων: $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ Διαφορά Κύβων: $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

Επίσης: $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

Επίσης: $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$ *(τετράγωνο αθροίσματος τριών όρων)*

Κριτηριο Αυτοαξιολογησης

Να λύσετε το ακόλουθο κριτήριο αξιολόγησης σε 90΄

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Να συμπληρώσετε τα κενά στις ισότητες ώστε να είναι αληθείς:

1) $(x-2y)^3 = x^3 - ... + ... - 8y^3$

2) $\dfrac{x^3-8}{...-...} = x^2+2x+4$

3) $\dfrac{(...)^3-(...)^3}{x-y} = x^2+xy+y^2$

4) $\dfrac{(...)^3+(...)^3}{4x^2-2xy+...} = ...+...$

5) $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^3 = ...+...+...+...$

Α.2 Χαρακτηρίστε τους παρακάτω ισχυρισμούς ως Αληθείς ή Ψευδείς:

1) $(-\alpha-\beta)^3 = (\alpha+\beta)^3$

2) $(-x)^3+y^3 = (y-x)(y^2+xy+y^2)$

3) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3+\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$,

$x, y \geq 0$

4) $\left(\alpha^{\frac{2}{3}}-\beta\right)^3 = \alpha^2-3\beta\cdot\sqrt[3]{\alpha^4}+3\beta^2\cdot\sqrt[3]{\alpha^2}-\beta^3$

$\alpha \geq 0$

5) $\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right)^3 = \alpha-\beta$, $\alpha, \beta \geq 0$

ΘΕΜΑ Β

Β.1 Δίνονται οι αριθμοί: $\alpha = \sqrt{3}-1$ και $\beta = \sqrt{3}+1$

Α) Να δείξετε ότι: $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 = 10$.

Β) Να βρεθεί η τιμή τη παράστασης: $\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}$

Γ) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}+1 = 5$.

Β.2 α) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\alpha^2\cdot(\alpha+1)-\alpha^2+1}{\alpha^2+(\alpha-1)^2+1} = \dfrac{\alpha+1}{2}$

β) Να υπολογιστεί το εξαγόμενο:

$$\frac{4051^2\cdot 4052-4051^2+1}{4051^2+4050^2+1}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1 Α) Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha+\beta)^3-(\alpha-\beta)^3 = 2\beta(\beta^2+3\alpha^2)$$

Β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$A = (x+3)^3-3(x+2)^3+3(x+1)^3-x^3$$

είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής x.

Γ.2 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(7^{\frac{1}{2}}-6^{\frac{1}{2}}\right)\left(3^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(7^{\frac{1}{2}}+6^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+3^{\frac{1}{2}}\right).$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1 Α) Αν α + β = 5 και $\alpha\cdot\beta = 1$ να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

i) $\alpha^2+\beta^2$

ii) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

iii) $\alpha^3+\beta^3$

iv) $\alpha^4\beta+\alpha\beta^4$

Β) Αν εφx + σφx = 5 να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων $εφ^2x + σφ^2x$, $εφ^3x+σφ^3x$.

Δ.2 Α) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A = \left(\alpha^{\frac{3}{4}}-\beta^{\frac{3}{4}}\right)\div\left(\alpha^{\frac{1}{4}}-\beta^{\frac{1}{4}}\right) \quad , \quad \alpha, \beta \geq 0$$

Β) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης Α για α = 0,01 και β = 0,81.

Κεφάλαιο 4ο

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Λέξεις κλειδιά: *εξισώσεις 1ου βαθμού, εξισώσεις 2ου βαθμού, ανισώσεις 1ου βαθμού, ανισώσεις 2ου βαθμού, εξισώσεις με απόλυτες τιμές, ανισώσεις με απόλυτες τιμές.*

Ιστορικό σημείωμα

Τα μαθηματικά των Αρχαίων Ελλήνων

Οι Αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί ήσαν σε θέση να επιλύουν γεωμετρικά δευτεροβάθμιες εξισώσεις της μορφής $x^2-\alpha\beta+\beta^2=0$ ή της μορφής $x^2+\alpha\beta+\beta^2=0$. Στο X βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη γίνεται διερεύνηση της εξίσωσης $x^2-\alpha\beta+\beta^2=0$. Ο Ευκλείδης απέδειξε ότι οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι ρητές ή άρρητες, αν οι αριθμοί $\sqrt{\alpha^2-4\beta^2}$ και α είναι ρητοί ή άρρητοι αντίστοιχα.

Εκτός από εξισώσεις δευτέρου βαθμού οι Αρχαίοι Έλληνες αντιμετώπιζαν και εξισώσεις τρίτου βαθμού. Ο Αρχιμήδης στο έργο του *«Περί σφαίρας και κυλίνδρου»* διατυπώνει γεωμετρικά την εξίσωση:

$$\frac{4\alpha^2}{x^2}=\frac{(3\alpha-x)(\mu+\nu)}{\mu\alpha} \qquad (1)$$

Την εξίσωση αυτή ο μεγάλος Συρακούσιος την έλυσε με τεμνόμενες κωνικές τομές. Συγκεκριμένα έδωσε στην (1) τη μορφή:

$$x^2(\gamma-x)=\delta\beta^2 \qquad (2)$$

Την εξίσωση (2) ο Αρχιμήδης την έλυσε στηριζόμενος στην τομή μιας παραβολής και μιας υπερβολής.

Οι αριθμητικές και αλγεβρικές γνώσεις των Αρχαίων Ελλήνων μπορούν να εκτιμηθούν και από διάφορα Αριθμητικά επιγράμματα (έμμετρα προβλήματα). Μια αξιομνημόνευτη συλλογή τέτοιων προβλημάτων είναι αυτή της «Παλατινής (ή Ελληνικής) ανθολογίας». Συγγραφέας της ανθολογίας είναι ο Μητρόδωρος ο Σάμιος (5ος αιώνας). Τα αριθμητικά επιγράμματα λύνονται είτε με εφαρμογές των τεσσάρων πράξεων της αριθμητικής, είτε με μερισμό ενός ποσού σε μέρη ανάλογα προς δοθέντες αριθμούς, είτε με τη βοήθεια συστημάτων ή εξισώσεων. Αναφέρουμε το εξής:

Είπε κυβερνητήρι πλατύν πόρον Ανδριακοίο
Τέμνων νηί. Αλός πόσα λείπεται είσετι μέτρα;
Τον δ' απαμείβετο ναύτα, μέσον Κριοίο μετώπου
Κριταίου Σικελής τε και Πελωρίδος εξάκι μέτρα
Χίλια. Δοιών δ' αίτε παροιχομένοιο δρόμοιο
πέμπτων διπλάσιον Σικελήν επί ποριμίδα λείπει.

Σε μετάφραση:

Ρώτησε κάποιος ναύτης τον κυβερνήτη ενός πλοίου που έπλεεε στο πλατύ Δριατικό πέλαγος.

– Πόσα στάδια στο πέλαγος υπολείπονται να διανύσουμε;

Αυτός δεν απάντησε:

– Ναύτη, από το μέτωπο του Κριού της Κρήτης, μέχρι της Πελωρίδας της Σικελίας είναι 6.000 στάδια. Μας λείπουν ακόμα δύο φορές τα 2/5 του διανυθέντος δρόμου για να φτάσουμε στο στενό της Σικελίας.

Πηγή: «Τα Μαθηματικά των Αρχαίων Ελλήνων», Ευαγγέλου Σπανδάγου, Εκδόσεις «Αιθρα», σελίδες 396-404

4.1

Εξισώσεις 1ου βαθμού

Τι καινούργιο υπάρχει στην παράγραφο

Στην παράγραφο αυτή θα επιλύσουμε απλές παραμετρικές εξισώσεις $1^{ου}$ βαθμού και ρεαλιστικά προβλήματα, που ανάγονται σε εξισώσεις αυτής της μορφής.

Απαραίτητες γνώσεις

Στο Γυμνάσιο μάθαμε:

1. να συνθέτουμε και να επιλύουμε προβλήματα της καθημερινότητας, με εξισώσεις της μορφής $\alpha x+\beta=\gamma$, αριθμητικά (μέσω κατάλληλων μοντέλων) και αλγεβρικά (με τις ιδιότητες της ισότητας),
2. να αναγνωρίζουμε τους όρους: εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, $1^{ο}$ και $2^{ο}$ μέλος, ισοδύναμες εξισώσεις, άγνωστος, λύση ή ρίζα,
3. να λύνουμε πολυωνυμικές εξισώσεις $1^{ου}$ βαθμού, δηλαδή εξισώσεις της μορφής $\alpha x+\beta=0$ με α,β πραγματικούς αριθμούς.

Εισαγωγική Δραστηριότητα

Ο Enrico κληρονόμησε την πιτσαρία “Luigi’s Pizza” από τον πατέρα του. Ο τρόπος τιμολόγησης (P σε ευρώ), σύμφωνα με τη διάμετρο (δ σε εκατοστά) κάθε πίτσας ήταν γραμμένος σε εμφανές σημείο στο γραφείο του πατέρα του $P=\lambda\cdot\delta-34$. Ο Enrico, όμως, δεν μπορούσε να καταλάβει τον ρόλο της μεταβλητής λ, μέχρι που βρήκε μια φωτογραφία που απεικόνιζε τον πατέρα του μπροστά από μια πίτσα διαμέτρου 40 εκατοστών (η μικρότερη που έφτιαχνε ο πατέρας του), η οποία είχε αναγραφόμενη τιμή 10 ευρώ.

i) Πώς πιστεύετε ότι χρησιμοποίησε τη φωτογραφία για να βρει τη μεταβλητή λ ο Enrico;

ii) Αν θέλει να φτιάξει μια νέα οικογενειακή πίτσα διαμέτρου 55 εκατοστών, πόσο θα πρέπει να την πουλάει, σύμφωνα με τη φόρμουλα του πατέρα του;

iii) Σύμφωνα με τη φόρμουλα, θα μπορούσε να φτιάχνει πίτσες με διάμετρο το πολύ 30 εκατοστά;

iv) Ο Enrico γνωρίζει ότι η παρασκευή πίτσας διαμέτρου δ του κοστίζει C = 0,1 (σε ευρώ). Να διερευνήσετε πως μεταβάλλεται το περιθώριο κέρδους, K, καθώς μεγαλώνει η πίτσα. Για ποιες διαμέτρους το περιθώριο κέρδους είναι θετικό

Ας δούμε τι έχει προκύψει

Επίλυση παραμετρικών εξισώσεων α΄ βαθμού

Επιλύοντας μια πολυωνυμική εξίσωση α΄ βαθμού $\alpha x+\beta=0$, όπως για παράδειγμα τις εξισώσεις: $3x+5=0$ ή $2x-1=4(x-1)-2x$ ή $2(3-x)=9-2x$ καταλήγουμε σε μια από τις γνωστές περιπτώσεις που μάθαμε στο Γυμνάσιο:

- να έχει μοναδική λύση ή
- να είναι αδύνατη ή
- να επαληθεύεται για κάθε πραγματικό αριθμό (αόριστη και ταυτοτική)

Για παράδειγμα:

- $3x+5=0$ οπότε $3x=-5$ που σημαίνει ότι η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την $x=-\dfrac{5}{3}$
- $2x-1=4(x-1)-2x$, οπότε $2x-1=4x-4-2x$, δηλαδή $2x-4x+2x=-4+1$, που σημαίνει $(2-4+2)x=-3$ επομένως $0\cdot x=-3$, άρα η εξίσωση είναι **αδύνατη.**
- $2(3-x)=6-2x$ οπότε $6-2x=6-2x$, δηλαδή $2x-2x=6-6$, που σημαίνει $(2-2)x=0$, επομένως $0\cdot x=0$, άρα η εξίσωση **επαληθεύεται για κάθε πραγματικό αριθμό,** επομένως είναι **αόριστη** και **ταυτοτική**.

Σχόλιο

Μια εξίσωση χαρακτηρίζεται ως **αόριστη,** όταν έχει άπειρες ρίζες (λύσεις) π.χ. η εξίσωση:

- $0\cdot x=0$ είναι αόριστη, διότι έχει άπειρες ρίζες όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών αλλά και η εξίσωση:
- $|x|=x$ είναι αόριστη, διότι έχει άπειρες λύσεις κάθε πραγματικό αριθμό x με $x\geq 0$

Μια εξίσωση λέγεται **ταυτοτική,** όταν επαληθεύεται για κάθε τιμή του συνόλου ορισμού της π.χ. η εξίσωση:

- $0\cdot x=0$ είναι ταυτοτική, διότι επαληθεύεται από όλες τις τιμές του συνόλου ορισμού της που είναι το $\mathbb{R}$, αλλά και η εξίσωση:
- $\sqrt{-x^2}=x$ είναι ταυτοτική, διότι επαληθεύεται από το μηδέν (0) που είναι ο μόνος αριθμός για τον οποίο ορίζεται η παράσταση $\sqrt{-x^2}$ χωρίς να είναι αόριστη, αφού δεν έχει άπειρες ρίζες (λύσεις).

Όταν όμως οι συντελεστές α και β της εξίσωσης περιέχουν γράμματα (παραμέτρους) τότε η επίλυσή της εξαρτάται από τις τιμές που μπορούν να πάρουν τα γράμματα αυτά (παράμετροι).

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση λέγεται **παραμετρική** εξίσωση 1ου βαθμού και η επίλυσή της λέγεται **διερεύνηση**. Κάθε παραμετρική εξίσωση 1ου βαθμού αποτελεί μια «οικογένεια» εξισώσεων, αφού για τις διαφορετικές τιμές των παραμέτρων της προκύπτει διαφορετική εξίσωση.

Επομένως, κατά την επίλυση μιας τέτοιας εξίσωσης θεωρούμε τις παραμέτρους ως γνωστούς αριθμούς και εκτελούμε πράξεις μέχρι να πάρει η εξίσωση τη μορφή $αx+β=0$. Τότε **διερευνούμε** τις λύσεις της διακρίνοντας τις παρακάτω περιπτώσεις που εξαρτώνται από τις τιμές των παραμέτρων:

```
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕπίλυσηΕξίσωσηςΠρώτουΒαθμού
  ΔΕΔΟΜΕΝΑ // α, β //
  ΑΝ α <> 0 ΤΟΤΕ
    ΕΜΦΑΝΙΣΕ "Μοναδική λύση: x =", -β/α
  ΑΛΛΙΩΣ
    ΑΝ β <> 0 ΤΟΤΕ
      ΕΜΦΑΝΙΣΕ "Αδύνατη"
    ΑΛΛΙΩΣ
      ΕΜΦΑΝΙΣΕ "Αόριστη και ταυτοτική"
    ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
  ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
ΤΕΛΟΣ
```

- Αν α οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός διάφορος του μηδενός $(α\neq 0)$ και β οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, τότε η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την $x=-\dfrac{β}{α}$.
- Αν α = 0 και β οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός διάφορος του μηδενός $(β\neq 0)$, τότε η εξίσωση δεν έχει λύση και λέγεται **αδύνατη**.
- Αν $α=0$ και $β=0$, τότε η εξίσωση **επαληθεύεται για οποιαδήποτε πραγματική τιμή του x** και λέγεται **αόριστη** και **ταυτοτική**.

Όλα τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Η εξίσωση α x + β = 0	
$α\neq 0$	Η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x=-\dfrac{β}{α}$
$α=0$ **και** $β\neq 0$	Η εξίσωση δεν έχει καμία λύση (αδύνατη στο $\mathbb{R}$)
$α=0$ **και** $β=0$	Η εξίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό (αόριστη και ταυτοτική)

Για παράδειγμα, να διερευνήσουμε τις λύσεις της εξίσωσης: $\lambda(\lambda-1)x+(1-\lambda)(\lambda-2)=0$ για όλες τις πραγματικές τιμές του λ. Η ποσότητα $\lambda(\lambda-1)$ έχει τον ρόλο του α και η ποσότητα $(1-\lambda)(\lambda-2)$ τον ρόλο του β. Καταρχάς η εξίσωση παίρνει τη μορφή: $\lambda(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda-2)$. Έχουμε $\lambda(\lambda-1)=0$, αν και μόνο αν $\lambda=0$ ή $\lambda=1$. Στη συνέχεια διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\lambda(\lambda-1)\neq 0$, δηλαδή αν $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$, τότε η εξίσωση έχει

  μοναδική λύση την $x=\dfrac{\cancel{(\lambda-1)}(\lambda-2)}{\lambda\cancel{(\lambda-1)}}=\dfrac{\lambda-2}{\lambda}$

- Αν $\lambda=0$, τότε η εξίσωση γίνεται $0\cdot x=2$ και είναι **αδύνατη** και
- Αν $\lambda=1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0\cdot x=0$ και είναι **αόριστη** και **ταυτοτική.**

```
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕπίλυσηΕξίσωσηςΜεΠαράμετροΛ
  ΔΕΔΟΜΕΝΑ // λ //
  ΑΝ (λ <> 0 ΚΑΙ λ <> 1) ΤΟΤΕ
    ΕΜΦΑΝΙΣΕ "Μοναδική λύση: x =", (λ - 2) / λ
  ΑΛΛΙΩΣ
    ΑΝ λ = 0 ΤΟΤΕ
      ΕΜΦΑΝΙΣΕ "Αδύνατη"
    ΑΛΛΙΩΣ
      ΕΜΦΑΝΙΣΕ "Αόριστη και ταυτοτική"
    ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
  ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
ΤΕΛΟΣ
```

Ασκήσεις κατανόησης

Α. Με απάντηση

1) Αν λ, α, β πραγματικοί αριθμοί να χαρακτηρίσετε ως Αληθείς ή Ψευδείς τους παρακάτω ισχυρισμούς αιτιολογώντας την απάντησή σας:

α) Η εξίσωση: $(\lambda-1)x=\lambda$, για $\lambda=0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$.

β) Η εξίσωση: $(\lambda-1)x=\lambda$, για $\lambda=1$ είναι αόριστη και ταυτοτική.

γ) Η εξίσωση: $(\lambda-1)x=\lambda^2-\lambda$, για $\lambda=1$ είναι αόριστη και ταυτοτική.

δ) Η εξίσωση: $(\alpha-\beta)x=\alpha^2-\beta^2$, για $\alpha\neq\beta$ έχει μοναδική λύση την $x=\alpha+\beta$.

ε) Η εξίσωση: $(\alpha^2+1)x=\alpha$, έχει πάντα μοναδική λύση.

Απαντηση

α) Είναι Αληθής, αφού για λ = 0 η εξίσωση γίνεται (0 –1)x = 0), οπότε – x = 0 άρα x = 0.

β) Είναι Ψευδής, αφού για λ = 1 η εξίσωση γίνεται (1 –1)x = 1) που σημαίνει $0\cdot x=1$ η οποία είναι **αδύνατη**.

γ) Είναι Αληθής αφού για λ = 1 η εξίσωση γίνεται $(1-1)x=1^2-1$ που σημαίνει $0\cdot x=0$ η οποία είναι **αόριστη** και **ταυτοτική,** αφού επαληθεύεται για κάθε πραγματική τιμή του x.

δ) Είναι Αληθής, αφού για $\alpha\neq\beta$ η εξίσωση γίνεται $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}x=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$ που σημαίνει: $1\cdot x=\dfrac{\cancel{(\alpha-\beta)}(\alpha+\beta)}{\cancel{(\alpha-\beta)}}$, άρα έχει **μοναδική λύση** την $x=\alpha+\beta$.

ε) Είναι Αληθής αφού για κάθε πραγματική τιμή του α ισχύει: $\alpha^2+1\neq 0$, οπότε η εξίσωση γίνεται $\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha^2+1}x=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+1}$, οπότε $1\cdot x=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+1}$, άρα έχει **μοναδική λύση** την $x=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+1}$.

Β. Για εξάσκηση:

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Με τις εξισώσεις 1ου βαθμού διερευνούμε παραμετρικές εξισώσεις 1ου βαθμού, επιλύουμε κλασματικές εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού, επιλύουμε προβλήματα που η λύση τους ανάγεται σε εξισώσεις 1ου βαθμού.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογη 1

Ο καθηγητής μαθηματικών σε μία τάξη του Γενικού Λυκείου για την εξαγωγή βαθμού τετραμήνου, χρησιμοποιεί ένα μαθηματικό μοντέλο με τύπο: $B_T = \lambda B_\Gamma + 8$, όπου B_T ο βαθμός του τετραμήνου, B_Γ ο βαθμός του γραπτού διαγωνίσματος τετραμήνου και λ πραγματικός αριθμός (παράμετρος).

α) Αν ένας μαθητής γράψει άριστα 20 στο γραπτό διαγώνισμα, να βρείτε τον βαθμό του στο τετράμηνο αν $\lambda = 0{,}4$ και αν $\lambda = 0{,}5$.

β) Αν ο μαθητής που θα γράψει άριστα 20, έχει στο τετράμηνο βαθμολογία 20, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ που έχει χρησιμοποιήσει ο καθηγητής.

γ) Αν $\lambda = 0{,}6$, τι βαθμό αρκεί να γράψει στο διαγώνισμα ένας μαθητής, ώστε να πάρει βαθμό 14 στο τετράμηνο;

Λυση

α) Αν $\lambda = 0{,}4$ τότε η εξίσωση γίνεται: $B_T = 0{,}4 \cdot B_\Gamma + 8$, οπότε για $B_\Gamma = 20$ έχουμε $B_T = 0{,}4 \cdot 20 + 8 = 16$ ενώ για $\lambda = 0{,}5$ τότε η εξίσωση γίνεται: $B_T = 0{,}5 \cdot B_\Gamma + 8$, οπότε για $B_\Gamma = 20$ έχουμε $B_T = 0{,}5 \cdot 20 + 8 = 18$

β) Αν $B_T = B_\Gamma = 20$ τότε έχουμε: $20 = \lambda \cdot 20 + 8$ που σημαίνει $\lambda \cdot 20 = 12$ δηλαδή $\lambda = 0{,}6$.

γ) Αφού $B_T = 0{,}6 \cdot B_\Delta + 8$, για να πάρει ο μαθητής βαθμό 19 στο τετράμηνο, αρκεί να γράψει στο διαγώνισμα: $14 = 0{,}6 \cdot B_\Delta + 8$, δηλαδή $B_\Delta = 10$.

Εφαρμογη 2

Δίνεται η εξίσωση $\alpha(2x - \alpha) = 3(2x - 3)$ (1), όπου α πραγματικός αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται στη μορφή $2(\alpha - 3)x = (\alpha - 3)(\alpha + 3)$.

ii) Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου α, αν η εξίσωση (1) επαληθεύεται για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x.

iii) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή της παραμέτρου α, ώστε η εξίσωση (1) να είναι αδύνατη.

Λυση

i) Η εξίσωση γράφεται $2\alpha x - \alpha^2 = 6x - 9$, οπότε $2\alpha x - 6x = \alpha^2 - 9$, επομένως $2(\alpha - 3)x = (\alpha - 3)(\alpha + 3)$.

ii) Αφού η εξίσωση επαληθεύεται για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x, πρέπει $2(\alpha - 3) = 0$ και $(\alpha - 3)(\alpha + 3) = 0$, που σημαίνει $\alpha - 3 = 0$ δηλαδή $\alpha = 3$.

iii) Έστω ότι υπάρχει τιμή του α για την οποία η εξίσωση είναι αδύνατη. Τότε θα ισχύει $\alpha - 3 = 0$ και $(\alpha - 3)(\alpha + 3) \neq 0$, οπότε $\alpha = 3$ και $(\alpha - 3)(\alpha + 3) \neq 0$.

Όμως για $\alpha = 3$ έχουμε $(\alpha - 3)(\alpha + 3) = (3 - 3)(3 + 3) = 0 \cdot 6 = 0$. Άρα δεν υπάρχει τιμή του α για την οποία η (1) είναι αδύνατη.

Εφαρμογη 3

Να διερευνηθεί η εξίσωση για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ:

$$\lambda^2 (x - 1) = 3(3x - 2\lambda + 3)$$

Λυση

Η εξίσωση γίνεται: $\lambda^2 x - \lambda^2 = 9x - 6\lambda + 9$, οπότε $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 6\lambda + 9$, δηλαδή

$(\lambda - 3)(\lambda + 3)x = (\lambda - 3)^2$ (1). Επίσης $(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0$ σημαίνει $\lambda = 3$ ή $\lambda = -3$.

Οπότε διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$, τότε η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση, τη $x = \dfrac{(\lambda-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(\lambda-3)}(\lambda+3)} = \dfrac{\lambda-3}{\lambda+3}$.
- Αν $\lambda = 3$ η εξίσωση (1) γίνεται: $0 \cdot x = 0$, που σημαίνει πως αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό άρα είναι αόριστη και ταυτοτική
- Αν $\lambda = -3$ η εξίσωση γίνεται: $0 \cdot x = 36$ που είναι αδύνατη.

Εφαρμογη 4

Να λυθούν οι εξισώσεις: **α)** $\dfrac{1}{2x-3} - \dfrac{3}{2x^2-3x} = \dfrac{5}{x}$, **β)** $\dfrac{2}{x-1} = \dfrac{3x-1}{x^2-x}$, **γ)** $\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x-4}{x^2+2x}$

Λυση

Για την επίλυση κλασματικών εξισώσεων, δηλαδή εξισώσεων που περιέχουν τουλάχιστον ένα κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή, ακολουθούμε την παρακάτω «στρατηγική»:

- βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παραστάσεων των παρονομαστών και απαιτούμε να είναι **διάφορο του μηδενός**. Οι τιμές του x για τις οποίες το ΕΚΠ θα είναι διάφορο του μηδενός θα αποτελούν το ΣΥΝΟΛΟ ΟΡΙΣΜΟΥ της εξίσωσης αφού για τις τιμές αυτές όλοι οι παρονομαστές της εξίσωσης δεν μηδενίζονται,
- **απαλείφουμε** τους παρονομαστές πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το ΕΚΠ σύμφωνα με την ιδιότητα:

αν $\alpha = \beta$ και $\gamma \neq 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$, και αντιστρόφως

- λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει,
- ελέγχουμε αν οι λύσεις είναι δεκτές δηλαδή αν ανήκουν στο σύνολο ορισμού της εξίσωσης.

Έτσι έχουμε:

α) Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει και αρκεί όλοι οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός. Αυτό το εξασφαλίζουμε αν απαιτήσουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών να είναι διάφορο του μηδενός.

Όμως: $2x^2 - 3x = x(2x-3)$. Οπότε το ΕΚΠ των παρονομαστών είναι $x(2x-3)$. Πρέπει και αρκεί $x(2x-3) \neq 0$ δηλαδή $x \neq 0$ και $x \neq \dfrac{3}{2}$. Άρα το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί εκτός από τους 0 και $\dfrac{3}{2}$. Οπότε για κάθε $x \neq 0$ και $x \neq \dfrac{3}{2}$ έχουμε:

$\dfrac{1}{2x-3} - \dfrac{3}{2x^2-3x} = \dfrac{5}{x}$, οπότε $\dfrac{1}{2x-3} - \dfrac{3}{x(2x-3)} = \dfrac{5}{x}$, δηλαδή

$x(2x-3)\dfrac{1}{2x-3} - x(2x-3)\dfrac{3}{x(2x-3)} = x(2x-3)\dfrac{5}{x}$, επομένως $x - 3 = 5(2x-3)$, άρα $x = \dfrac{4}{3}$.

Η λύση αυτή είναι δεκτή.

β) Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει και αρκεί όλοι οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός. Αυτό το εξασφαλίζουμε αν απαιτήσουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών να είναι διάφορο του μηδενός. Όμως $x^2 - x = x(x-1)$, οπότε το ΕΚΠ των $x-1$, x^2-x είναι $x(x-1)$. Πρέπει και αρκεί $x(x-1) \neq 0$ δηλαδή $x \neq 0$ και $x \neq 1$. Άρα το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί εκτός από τους 0 και 1. Οπότε για κάθε πραγματικό αριθμό x με $x \neq 0$ και $x \neq 1$ έχουμε:

$\dfrac{2}{x-1} \cdot x(x-1) = \dfrac{3x-1}{x^2-x} \cdot x(x-1)$ που σημαίνει $2x = 3x - 1$, επομένως $x = 1$.

Όμως, η λύση αυτή απορρίπτεται, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

γ) Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει και αρκεί όλοι οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός. Αυτό το εξασφαλίζουμε αν απαιτήσουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών να είναι διάφορο του μηδενός.
Όμως $x^2+2x=x(x+2)$, οπότε το ΕΚΠ των: $x+2$, x και x^2+2x είναι $x\cdot(x+2)$.
Πρέπει και αρκεί $x\cdot(x+2)\neq 0$, δηλαδή $x\neq 0$ και $x\neq -2$. Άρα το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί εκτός από τους 0 και -2. Οπότε για κάθε πραγματικό αριθμό x με $x\neq 0$ και $x\neq -2$ έχουμε $\frac{3}{x+2}\cdot x(x+2)-\frac{2}{x}\cdot x(x+2)=\frac{x-4}{x^2+2x}\cdot x(x+2)$, που σημαίνει $3x-2(x+2)=x-4$, επομένως $0\cdot x=0$. Άρα η εξίσωση επαληθεύεται για κάθε πραγματική τιμή του x εκτός από 0 και -2.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

α) Να βρεθεί η πλευρά β ενός μεταλλικού ορθογώνιου πλαισίου, αν η άλλη πλευρά του είναι 5cm και η περίμετρός του είναι $\Pi=28cm$

β) Αν V_0 ο όγκος που έχει ένα υλικό σε θερμοκρασία $0^\circ C$ και α ο συντελεστής διαστολής του υλικού να βρείτε τη θερμοκρασία θ (σε βαθμούς Κελσίου), αν ο όγκος V σε θερμοκρασία $\theta^\circ C$ δίνεται από το μαθηματικό μοντέλο με τύπο $V=V_0(1+\alpha\theta)$.

γ) Σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση των αερίων ισχύει $P\cdot V=nRT$, όπου V ο όγκος, T η θερμοκρασία και P η πίεση του αερίου, n και R σταθερές. Να λύσετε την εξίσωση ως προς τη θερμοκρασία T.

ΛΥΣΗ

Μια πολύ χρήσιμη εφαρμογή των εξισώσεων 1[ου] βαθμού είναι η επίλυση ενός τύπου της Άλγεβρας, της Γεωμετρίας, της Φυσικής ή της Χημείας κ.α. ως προς μία από τις μεταβλητές που περιέχονται σ' αυτόν. Η «στρατηγική» μιας τέτοιας επίλυσης είναι να θεωρήσουμε όλες τις άλλες μεταβλητές ως «γνωστούς» πραγματικούς αριθμούς και να επιλύσουμε ως προς τη ζητούμενη μεταβλητή που θα είναι ο άγνωστος.

α) Έστω α, β οι πλευρές του ορθογωνίου. Αν Π η περίμετρος του ορθογωνίου, θα ισχύει $\Pi=2(\alpha+\beta)$.
Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{array}{l|c} \Pi=2\alpha+2\beta & -2\alpha \\ \Pi-2\alpha=2\beta & \div 2 \\ \frac{\Pi-2\alpha}{2}=\beta & \end{array}$$

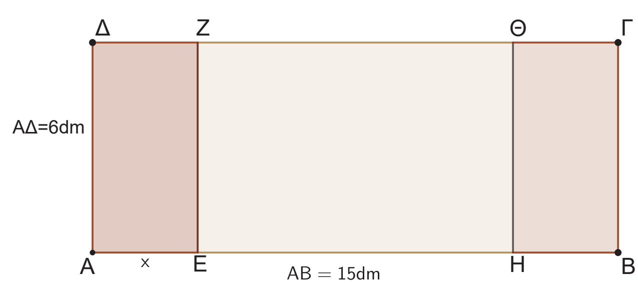
Άρα $\beta=\frac{\Pi-2\alpha}{2}$. Αντικαθιστώντας έχουμε $\beta=\frac{28-2\cdot 5}{2}=\frac{18}{2}=9cm$.

β) Θεωρούμε τις μεταβλητές: V, V_0 και α ως «γνωστούς» αριθμούς και επιλύουμε ως προς τη ζητούμενη μεταβλητη θ: $V=V_0(1+\alpha\theta)$, οπότε $V=V_0+V_0\alpha\theta$, δηλαδή $V-V_0=V_0\alpha\theta$, επομένως $\frac{V-V_0}{V_0\alpha}=\frac{\cancel{V_0\alpha}\theta}{\cancel{V_0\alpha}}$, άρα $\frac{V-V_0}{V_0\alpha}=\theta$

γ) Θεωρούμε τις μεταβλητές: P,V, n, R ως «γνωστούς» αριθμούς και επιλύουμε ως προς τη ζητούμενη μεταβλητη T: $PV=nRT$, οπότε $\frac{PV}{nR}=\frac{\cancel{nR}T}{\cancel{nR}}$, άρα $\frac{PV}{nR}=T$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

Ένας ξυλουργός θέλει να φτιάξει ένα ορθογώνιο παράθυρο ΑΒΓΔ με $AB=15dm$ και $A\Delta=6dm$. Πρέπει να το χωρίσει σε τρία ορθογώνια, έτσι ώστε τα ακριανά ΑΕΖΔ και ΗΒΓΘ να είναι ίσα μεταξύ τους και να έχουν άθροισμα εμβαδών όσο τα $\frac{2}{3}$ του μεσαίου.



α) Να βρείτε τα μήκη των ΑΕ και ΒΗ.

β) Να βρείτε τα εμβαδά των τριών τμημάτων και να επαληθεύσετε τα αποτελέσματά σας.

ΛΥΣΗ

Για την επίλυση ενός προβλήματος, όπως έχουμε αναφέρει, ακολουθούμε την εξής «στρατηγική»:

- Θέτουμε με x τον άγνωστο του προβλήματος.
- Κάθε άλλη μεταβλητή την εκφράζουμε ως συνάρτηση του x.
- Θέτουμε τους περιορισμούς στις μεταβλητές που προκύπτουν από το πρόβλημα.
- Καταστρώνουμε και στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση που εκφράζει το πρόβλημα.
- Ελέγχουμε αν οι λύσεις είναι σύμφωνες με τους περιορισμούς που έχουμε θέσει

Έστω $AE = x$. Τότε $BH = x$ οπότε $EH = 15 - 2x$.

Πρέπει και αρκεί $x \geq 0$ και $15 - 2x \geq 0$, δηλαδή $x \geq 0$ και $x \leq 7{,}5$ άρα $0 \leq x \leq 7{,}5$.

Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε: $(ΑΕΖΔ) + (ΗΒΓΔ) = \frac{2}{3}(ΕΗΘΖ)$, οπότε $2 \cdot 6x = \frac{2}{3} \cdot (15 - 2x) \cdot 6$,

δηλαδή $3x = 15 - 2x$, επομένως $x = 3$, τιμή που είναι δεκτή αφού $0 \leq 3 \leq 7{,}5$. Άρα AE = HB = 3dm.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: ***ΕΦΑΡΜΟΓΗ 7*** *(Πρόβλημα διερευνητικής μάθησης/ μοντελοποίησης)*

Ασκήσεις – Προβλήματα

1) Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 4)x = \lambda(\lambda - 2)$ (1), όπου λ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός (λ παράμετρος).

α) Να γράψετε τις εξισώσεις που προκύπτουν για $\lambda = 1$, για $\lambda = 2$ και για $\lambda = -2$ και να τις λύσετε.

β) Να προσδιορίσετε τις πραγματικές τιμές του λ, ώστε η (1) να έχει μια μοναδική λύση.

γ) Να βρείτε τη πραγματική τιμή του λ, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 7.

2) Να φέρετε τις παρακάτω εξισώσεις στη μορφή $\alpha \cdot x = \beta$ και να λυθούν (διερευνηθούν) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) $\lambda^2(x - 2) - x = 3\lambda + 1$

β) $\lambda^2(x - 1) = 4(x + 1) - 5\lambda + 2$

γ) $(\lambda + 3)x - 2\lambda - 3 = 4(x - \lambda) + \lambda(\lambda - 2)$

δ) $\frac{\lambda + 8}{2} + \frac{\lambda x}{3} = \lambda^2 - \frac{2x - \lambda}{3} + \frac{\lambda}{6}$

3) Ν' αποδειχθεί ότι για οποιεσδήποτε τιμές των α, β η εξίσωση $\alpha(3x - \alpha) - \beta x = 2\beta(x - \alpha) + \beta^2$ έχει λύση.

4) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 0$ **β)** $1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 - x} = 0$ **γ)** $\frac{x + 1}{x - 2} - \frac{2x}{4 - x^2} = \frac{1}{x + 2}$ **δ)** $\frac{x + 1}{x - 2} + \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{2(x^2 + 2)}{x^2 - 4}$

5) Το μήκος ενός ορθογωνίου είναι διπλάσιο από το πλάτος του. Προκειμένου να αυξήσουμε το εμβαδόν του κατά 13 μονάδες, αυξάνουμε τις διαστάσεις του κατά 1 μονάδα.
Έστω x, y οι διαστάσεις του αρχικού ορθογωνίου.

i) Να εκφράσετε με ένα μαθηματικό μοντέλο το αρχικό εμβαδόν ως προς μία από τις δύο μεταβλητές x, y.

ii) Να εκφράσετε με ένα μαθηματικό μοντέλο το τελικό εμβαδόν ως προς την ίδια μεταβλητή του ερωτήματος i).

iii) Να βρείτε τις διαστάσεις του αρχικού ορθογωνίου.

6) **i)** Να εκφράσετε με μια μεταβλητή τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς.

ii) Να βρείτε δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, των οποίων το γινόμενο αυξημένο κατά το εντεκαπλάσιο του πρώτου να ισούται με το τετράγωνο του πρώτου αυξημένο κατά το οχταπλάσιο του δεύτερου.

7) Μια black Friday συνάντησε κάποιος στο ταμείο ενός πολυκαταστήματος μια ομάδα ανθρώπων στην ουρά και τους είπε:

– Γειά σας φίλοι μου εκατό!

Απάντησε τότε ένας από την ουρά:

– Δεν είμαστε εκατό. Για να είμασταν εκατό έπρεπε να είμασταν όσοι είμαστε και άλλοι τόσοι και οι μισοί και οι μισοί των μισών και συ ακόμα!

i) Αν x το πλήθος των ανθρώπων της ουράς εκφράστε σε μαθηματική γλώσσα (εξίσωση) το παραπάνω πρόβλημα.

ii) Να λύσετε την εξίσωση για να βρείτε πόσοι άνθρωποι ήταν στην ουρά.

8) Ένα έλατο μεγαλώνει περίπου 12 cm το χρόνο τα πρώτα 20 χρόνια και μια βελανιδιά περίπου 45 cm το χρόνο. Θα φυτευτεί έλατο μήκους 2,5 m και βελανιδιά ύψους 85 cm. Μετά από πόσα χρόνια η βελανιδιά θα προλάβει το έλατο; *(Το παραπάνω πρόβλημα είναι ένα από τα αριθμητικά προβλήματα του Γερμανού μαθηματικού Adam Riese (1492-1559)).*

9) Δύο φίλοι ξεκινούν με τα αυτοκίνητά τους ταυτόχρονα από τις πόλεις Α και Β, έχοντας σταθερές ταχύτητες 40km/h και 30km/h, αντίστοιχα. Η απόσταση των πόλεων είναι 70km, κινούμενοι ευθύγραμμα.

i) Να εκφράσετε με τη βοήθεια μιας μεταβλητής τις αποστάσεις των πόλεων Α και Β από το σημείο συνάντησης Γ.

ii) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν.

iii) Να βρείτε σε ποια απόσταση από την πόλη Α θα συναντηθούν: **α)** αλγεβρικά, **β)** γραφικά

10) Ο παππούς θέλει να αγοράσει πετρέλαιο για μια δεξαμενή που έχει στο χωριό, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

α) Αν οι διαστάσεις της δεξαμενής είναι 9m (μήκος), 4m (πλάτος) και 1,5m (ύψος), να βρείτε τη χωρητικότητα σε λίτρα της δεξαμενής, την οποία ο παππούς θέλει να γεμίσει για την περίοδο των Χριστουγέννων, που θα τον επισκεφθούν τα εγγόνια του.

β) Ο τύπος βάσει του οποίου ο ιδιοκτήτης του πρατηρίου καυσίμων υπολογίζει το κόστος του πετρελαίου έχει τη μορφή $P = \lambda \cdot V + 20$, όπου P η αξία, V ο όγκος και λ μια παράμετρος, την οποία δεν μπορούσε να θυμηθεί ο παππούς. (Τα 20 ευρώ προστίθενται στον τύπο για να καλύψουν τα έξοδα μεταφοράς από το πρατήριο καυσίμων προς το χωριό που μένει ο παππούς). Ψάχνοντας στο συρτάρι του ο παππούς βρήκε την απόδειξη αγοράς της μισής (από την τωρινή) ποσότητας πετρελαίου που είχε κάνει το φθινόπωρο και σύμφωνα με αυτή είχε πληρώσει 60,5 ευρώ. Έτσι, κατόρθωσε να βρει την τιμή της παραμέτρου λ και να υπολογίσει το κόστος του πετρελαίου που αγόρασε για την περίοδο των Χριστουγέννων. Μπορείτε κι εσείς να βρείτε τις αντίστοιχες τιμές;

11) Η ταχύτητα v στην επιταχυνόμενη κίνηση δίνεται από τη σχέση $v = v_0 + \alpha t$, όπου α η επιτάχυνση και v_0 η αρχική ταχύτητα.

α) Να επιλύσετε τον τύπο αυτόν ως προς τον χρόνο t.

β) Να λύσετε τον τύπο αυτόν ως προς α και

γ) Να αποδείξετε ότι ο τύπος $s = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ του διαστήματος παίρνει τη μορφή $s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t$.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στο σύντομο test που προτείνεται.

4.2

Ανισότητες, Ανισώσεις 1ου βαθμού και Εξισώσεις – Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Τι καινούργιο υπάρχει στην παράγραφο

1) στην παράγραφο αυτή θα επιλύσουμε αλγεβρικά και γεωμετρικά απλές εξισώσεις, ανισώσεις και προβλήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής,
2) διερευνώ τις ιδιότητες που συνδέουν τη διάταξη με τις πράξεις και αποδεικνύουν ανισοτικές σχέσεις.

Απαραίτητες γνώσεις

Στο Γυμνάσιο μάθαμε:

A) Αν α, β πραγματικοί αριθμοί τότε:

- $\alpha > \beta$ αν και μόνο αν $\alpha - \beta > 0$
- $\alpha < \beta$ αν και μόνο αν $\alpha - \beta < 0$
- $\alpha \geq \beta$ αν και μόνο αν $\alpha - \beta \geq 0$
- $\alpha \leq \beta$ αν και μόνο αν $\alpha - \beta \leq 0$
- Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ $(\text{ή } \beta \geq 0)$, τότε $\alpha + \beta > 0$
- Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ $(\text{ή } \beta \leq 0)$, τότε $\alpha + \beta < 0$
- Αν α, β ομόσημοι, τότε $\alpha \cdot \beta > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} > 0$ και αντίστροφα (κανόνας προσήμων)
- $\alpha^2 \geq 0$
- Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = \beta = 0$ και αντιστρόφως
- $\alpha^2 + \beta^2 \geq 0$
- Αν $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, τότε τουλάχιστον ένα από τα α,β δεν είναι μηδέν.
- ισχύει αποκλειστικά ένα από τα τρία: $\alpha = 0$, $\alpha > 0$, $\alpha < 0$
- ισχύει αποκλειστικά ένα από τα τρία: $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha < \beta$

B) να επιλύουμε ανισώσεις 1ου βαθμού.

Εισαγωγική δραστηριότητα

A. Ο Θωμάς θέλει να κατέβει με το αυτοκίνητό του στο κέντρο της πόλης, για να αγοράσει βίδες από μια βιοτεχνία και ζητά καταρχάς τη βοήθειά μας ως προς την πιο συμφέρουσα επιλογή χώρου στάθμευσης.

Χώρος στάθμευσης Α: Στο χώρο Α, η στάθμευση κοστίζει 5 ευρώ την πρώτη ώρα και επιπλέον 1,2 ευρώ για κάθε ώρα πλέον της πρώτης.

Χώρος στάθμευσης Β: Στο χώρο Β, η στάθμευση κοστίζει 4 ευρώ την πρώτη ώρα και επιπλέον 1,6 ευρώ για κάθε ώρα πλέον της πρώτης.

i) Πόσο θα κοστίσει κάθε επιλογή αν παραμείνει στο κέντρο δύο, τρεις, τρεισήμισι, τέσσερις ή πέντε ώρες;

ii) Πόσες ώρες τουλάχιστον πρέπει να παραμείνει στο κέντρο ώστε να τον συμφέρει ο χώρος Α;

B. Στη συνέχεια ο Θωμάς μας ενημερώνει ότι στη βιοτεχνία (τόρνος) παράγονται βίδες που το μήκος τους από την παραγωγή μετρήθηκε 5cm. Αν το σφάλμα μέτρησης είναι το πολύ 0,1cm και δ το πραγματικό μήκος της βίδας:

i) Να σημειώσετε τα άκρα του διαστήματος στο οποίο ανήκει το πραγματικό μήκος δ των βιδών στην αριθμογραμμή.

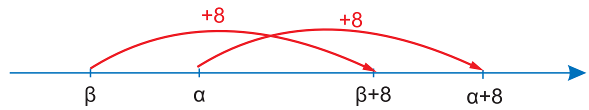
ii) Να βρείτε ένα μαθηματικό μοντέλο που να εκφράζει την απόσταση του πραγματικού μήκους δ των βιδών από το επιθυμητό τους μήκος (5cm).

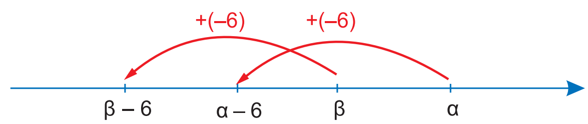
iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το ελάχιστο και μέγιστο μήκος των βιδών του ερωτήματος i).

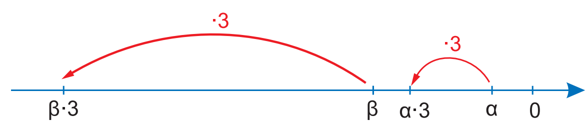
Ας δούμε τι έχει προκύψει:

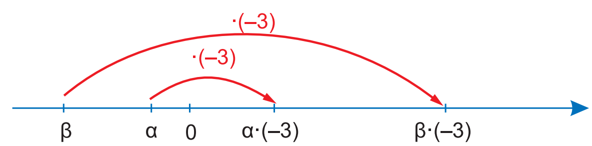
Ιδιότητες ανισοτικών σχέσεων: διάταξη και πράξεις

Έστω δυο πραγματικοί αριθμοί α και β με α > β (1) στην αριθμογραμμή.









- Αν προσθέσουμε 8 μονάδες και στα δύο μέλη της ανισότητας (1), όπως φαίνεται στο σχήμα 1, θα προκύψει πάλι: $\alpha+8>\beta+8$.
- Αν αφαιρέσουμε 6 μονάδες και από τα δύο μέλη της ανισότητας (1), όπως φαίνεται στο σχήμα 2, θα προκύψει πάλι: $\alpha-6>\beta-6$.
- Αν πολλαπλασιάσουμε με τον θετικό αριθμό 3 και τα δύο μέλη της ανισότητας (1), όπως φαίνεται στο σχήμα 3, θα προκύψει πάλι: $\alpha\cdot 3>\beta\cdot 3$.
- Αν όμως πολλαπλασιάσουμε με τον αρνητικό αριθμό –3 και τα δύο μέλη της ανισότητας (1), όπως φαίνεται στο σχήμα 4, θα προκύψει ανισότητα με διαφορετική φορά:
$$\alpha\cdot(-3)<\beta\cdot(-3)$$

Γενικότερα, προκύπτει ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες της διάταξης:

1. Αν $\alpha>\beta$ τότε $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$ και αντιστρόφως.

2. Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>0$ τότε $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$ και αντιστρόφως.

3. Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma<0$ τότε $\alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma$ και αντιστρόφως.

Επίσης, ισχύει ότι:

4. Αν $\alpha>\beta$ και $\beta>\gamma$ τότε $\alpha>\gamma$ **(Μεταβατική ιδιότητα)**.

Πόρισμα: Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.

5. Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$ τότε $\alpha+\gamma>\beta+\delta$ (Προσοχή δεν ισχύει πάντα το αντίστροφο!)

6. Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$ και $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$ τότε $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\delta$ (Προσοχή δεν ισχύει πάντα το αντίστροφο!)

Σχόλια

1) Η ιδιότητα 5 ισχύει και για περισσότερες ανισότητες. Έτσι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu$ και $\beta_1,\beta_2,...,\beta_\nu$ όπου ν θετικός ακέραιος, έχουμε:
$$\text{αν } \alpha_1>\beta_1 \text{ και } \alpha_2>\beta_2 \ \dots \text{ και } \alpha_\nu>\beta_\nu \quad \text{τότε } \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu>\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu$$

2) Η ιδιότητα 6 ισχύει και για περισσότερες ανισότητες. Έτσι, για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu$ και $\beta_1,\beta_2,...,\beta_\nu$ όπου ν θετικός ακέραιος, έχουμε:
- αν $\alpha_1>\beta_1$ και $\alpha_2>\beta_2$ … και $\alpha_\nu>\beta_\nu$ τότε $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot...\cdot\alpha_\nu>\beta_1\cdot\beta_2\cdot...\cdot\beta_\nu$

Οπότε για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α και β και ν θετικό ακέραιο ισχύει:
- αν $\alpha>\beta$ τότε $\alpha^\nu>\beta^\nu$ και αντιστρόφως
- αν $\alpha=\beta$ τότε $\alpha^\nu=\beta^\nu$ και αντιστρόφως

3)
- αν $\alpha<\beta$ και $\alpha\cdot\beta>0$, τότε $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$
- αν $\alpha<\beta$ και $\alpha\cdot\beta<0$, τότε $\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}$

Πράγματι, αν $3<4$, τότε $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$ και αν $-4<-3$, τότε $-\frac{1}{4}>-\frac{1}{3}$, ενώ αν $-4<3$, τότε $-\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$.

Ασκήσεις κατανόησης

Α. Με απάντηση

1) Χαρακτηρίστε ως Αληθείς ή Ψευδείς για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α) $(\alpha-1)^2+(\alpha-2)^2>0$ **β)** $|\alpha-3|+|\alpha-4|>0$ **γ)** $(\alpha-1)^2+(\beta-2)^2>0$

δ) $|\alpha-3|+|\beta-4|>0$ **ε)** $(\alpha-2026)^2+|\beta-2027|^2\geq 0$

Απάντηση: **α)** Αληθής, **β)** Αληθής, **γ)** Ψευδής, **δ)** Ψευδής, **ε)** Αληθής

2) *Επιλέξτε τη σωστή απάντηση στους παρακάτω ισχυρισμούς αιτιολογώντας σύντομα την απάντησή σας:*

α) Αν $\frac{\alpha}{\beta}>1$ τότε:

Α) $\alpha>\beta$ **Β)** $\alpha<\beta$ **Γ)** Δεν γνωρίζω

β) Αν α, β θετικοί αριθμοί και 3α = 2β

Α) $\alpha>\beta$ **Β)** $\alpha<\beta$ **Γ)** Δεν γνωρίζω

γ) Αν 2 + α = 3 + β τότε:

Α) $\alpha>\beta$ **Β)** $\alpha<\beta$ **Γ)** Δεν γνωρίζω

Απάντηση:

α) Γ: διότι αν $\beta>0$, τότε $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta>1\cdot\beta$, δηλαδή $\alpha>\beta$, ενώ αν $\beta<0$, τότε $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta<1\cdot\beta$, δηλαδή $\alpha<\beta$

β) Β: διότι αφού $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{3}<1$, ισχύει $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta<1\cdot\beta$, άρα $\alpha<\beta$

γ) Α: διότι αν $\alpha-\beta=3-2=1>0$, τότε $\alpha>\beta$

Β. Για εξάσκηση

1) Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y έχουμε 2 < x < y. Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: x^4, y^4, $(x-1)^4$, $(y+1)^4$.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Οι παραπάνω ιδιότητες της διάταξης μας δίνουν τη δυνατότητα να αποδείξουμε ανισοτικές σχέσεις και να βρούμε τα όρια που κινούνται παραστάσεις με μεταβλητές αν γνωρίζουμε τα όρια που περιέχονται οι μεταβλητές αυτές.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Α) Να αποδείξετε ότι:

α) για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2+6\alpha+10>0$,

β) για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει $\alpha^2+\beta^2+4\alpha+6\beta+13\geq 0$.

Β) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β αν $\alpha^2+\beta^2+4\alpha+6\beta+13=0$.

ΛΥΣΗ

Α) α) Είναι $\alpha^2+6\alpha+10=(\alpha^2+6\alpha+9)+1=(\alpha+3)^2+1>0$, αφού $(\alpha+3)^2\geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό α και $1>0$.

β) Έχουμε $\alpha^2+\beta^2+4\alpha+6\beta+13=(\alpha^2+4\alpha+4)+(\beta^2+6\beta+9)=(\alpha+2)^2+(\beta+3)^2\geq 0$, αφού για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει: $(\alpha+3)^2\geq 0$ και $(\beta+3)^2\geq 0$.

Β) $\alpha^2+\beta^2+4\alpha+6\beta+13=0$, οπότε $(\alpha+2)^2+(\beta+3)^2=0$, που σημαίνει $(\alpha+2)^2=0$ και $(\beta+3)^2=0$, άρα $\alpha=-2$ και $\beta=-3$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

α) Αν $1\leq x\leq 3$ (1) και $-2\leq y\leq 5$ (2), να βρεθούν τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων: i) $A=3x+2y$, ii) $B=2x-y+3$.

β) Αν $2\leq x\leq 5$ (1) και $3\leq y\leq 9$ (2), να βρεθούν τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων: i) $\Gamma=x^2+y^2$, ii) $\Delta=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

ΛΥΣΗ

α) i) Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $3\cdot 1\leq 3\cdot x\leq 3\cdot 3$, επομένως $3\leq 3x\leq 9$ και

$2\cdot(-2)\leq 2\cdot y\leq 2\cdot 5$, δηλαδή $-4\leq 2\cdot y\leq 10$.

Οπότε $3+(-4)\leq 3x+2y\leq 9+10$, που σημαίνει $-1\leq 3x+2y\leq 19$ άρα $-1\leq A\leq 19$.

ii) Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $2\cdot 1\leq 2\cdot x\leq 2\cdot 3$, επομένως $2\leq 2x\leq 6$ και

$(-1)\cdot(-2)\geq -1\cdot y\geq -1\cdot 5$, που σημαίνει $-5\leq -y\leq 2$. Οπότε $2+(-5)\leq 2x+(-y)\leq 6+2$, δηλαδή $-3\leq 2\chi-\psi\leq 8$ που σημαίνει $-3+3\leq 2\chi-\psi+3\leq 8+3$, άρα $0\leq B\leq 11$.

β) i) Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $2^2\leq x^2\leq 5^2$, επομένως $4\leq x^2\leq 25$ και $3^2\leq y^2\leq 9^2$, που σημαίνει $9\leq x^2+y^2\leq 81$.

Οπότε $4+9\leq x^2+y^2\leq 25+81$, δηλαδή $13\leq x^2+y^2\leq 106$, άρα $13\leq \Gamma\leq 106$.

ii) Από τις σχέσεις (1) και (2)προκύπτει $\frac{1}{5}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{9}\leq\frac{1}{y}\leq\frac{1}{3}$. Οπότε $\frac{1}{5}+\frac{1}{9}\leq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, που σημαίνει $\frac{14}{45}\leq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leq\frac{5}{6}$ άρα $\frac{14}{45}\leq\Delta\leq\frac{5}{6}$.

Ανισώσεις πρώτου βαθμού

Δραστηριότητα

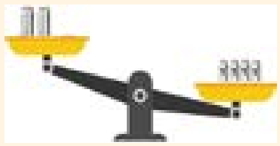
Α) Στη διπλανή ζυγαριά (σχ.1) έχουμε:

- στον αριστερό δίσκο δύο μεγάλα κουτιά ίσου βάρους και τρία μικρότερα κουτιά του ενός κιλού το καθένα και
- στον δεξιό δίσκο ένα μεγάλο κουτί ίσου βάρους με τα προηγούμενα μεγάλα κουτιά και πέντε κουτιά του ενός κιλού.

σχ. 1

Αν ονομάσουμε x το βάρος του μεγάλου κουτιού, ποια σχέση μπορούμε να γράψουμε για το βάρος x ερμηνεύοντας το σχήμα που βλέπουμε;

Β) Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο για τη ζυγαριά του επομένου σχήματος 2. Να μετασχηματίσετε τη σχέση που φτιάξατε τώρα ακολουθώντας τα επόμενα σχήματα 3 και 4.


σχ. 2


σχ.3


σχ. 4

Ας δούμε τι έχει προκύψει

Η παραπάνω δραστηριότητα μας θυμίζει τη «στρατηγική» που ακολουθούμε στην επίλυση των ανισώσεων πρώτου βαθμού. Ας την δούμε για την ανίσωση $\alpha x + \beta > 0$:

Έχουμε $\alpha x + \beta + (-\beta) > 0 + (-\beta)$, που σημαίνει $\alpha x > -\beta$ (1)

Στη συνέχεια διακρίνουμε περιπτώσεις:

1η: Αν $\alpha > 0$, τότε $\frac{\alpha x}{\alpha} > \frac{-\beta}{\alpha}$ που σημαίνει $x > \frac{-\beta}{\alpha}$, επομένως λύσεις είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί οι μεγαλύτεροι του $-\frac{\beta}{\alpha}$, δηλαδή όλοι οι αριθμοί που ανήκουν στο **διάστημα** $\left(-\frac{\beta}{\alpha}, +\infty\right)$.

2η: Αν $\alpha < 0$, τότε $\frac{\alpha x}{\alpha} < \frac{-\beta}{\alpha}$ που σημαίνει $x < \frac{-\beta}{\alpha}$, δηλαδή λύσεις είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί οι μικρότεροι του $-\frac{\beta}{\alpha}$, άρα όλοι οι αριθμοί που ανήκουν στο **διάστημα** $\left(-\infty, -\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

```
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕπίλυσηΑνίσωσηςΠρώτουΒαθμού
  ΔΕΔΟΜΕΝΑ // α, β //
  ΑΝ α > 0 ΤΟΤΕ
    ΕΜΦΑΝΙΣΕ "Η λύση είναι: x > ", -β / α
  ΑΛΛΙΩΣ
    ΑΝ α < 0 ΤΟΤΕ
      ΕΜΦΑΝΙΣΕ "Η λύση είναι: x < ", -β / α
    ΑΛΛΙΩΣ // δηλαδή α = 0
      ΑΝ -β > 0 ΤΟΤΕ // Η ισοδύναμα, β < 0
        ΕΜΦΑΝΙΣΕ "Αδύνατη"
      ΑΛΛΙΩΣ // δηλαδή -β <= 0
        ΑΝ -β < 0 ΤΟΤΕ // Η ισοδύναμα, β > 0
          ΕΜΦΑΝΙΣΕ "Ταυτοτική ανισότητα"
        ΑΛΛΙΩΣ // δηλαδή -β = 0, άρα β = 0
          ΕΜΦΑΝΙΣΕ "Αδύνατη"
        ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
      ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
    ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
ΤΕΛΟΣ
```

3η: Αν $\alpha = 0$, τότε η ανίσωση (1) γίνεται $0 \cdot x > -\beta$. Οπότε διακρίνουμε πάλι περιπτώσεις για τον αριθμό $-\beta$.

- Αν $-\beta > 0$, δηλαδή $\beta < 0$, τότε η ανίσωση είναι **αδύνατη**.
- Αν $-\beta < 0$, δηλαδή $\beta > 0$, τότε η ανίσωση επαληθεύεται για κάθε πραγματικό αριθμό x και λέγεται **ταυτοτική ανισότητα**.
- Αν $-\beta = 0$, δηλαδή $\beta = 0$, τότε η ανίσωση είναι **αδύνατη**.

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τις ανισώσεις: $\alpha x + \beta < 0$, $\alpha x + \beta \geq 0$, $\alpha x + \beta \leq 0$

Ασκήσεις κατανόησης

Α. Με απάντηση

Να χαρακτηρίσετε ως Αληθείς (Α) ή Ψευδείς (Ψ) τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α) Η ανίσωση $0 \cdot x > 0$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β) Η ανίσωση $0 \cdot x \geq 0$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

γ) Η ανίσωση $-7 \cdot x > 0$ έχει λύσεις όλους τους αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς.

δ) Η ανίσωση $0 \cdot x \geq -7$ είναι αδύνατη.

ε) Η ανίσωση $0 \cdot x \geq 7$ είναι αδύνατη.

Απάντηση: α) Ψ, **β)** Α, **γ)** Α, **δ)** Ψ, **ε)** Α

Β. Για εξάσκηση

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω λύνουμε ανισώσεις πρώτου βαθμού.

Λυμένη Εφαρμογή

Εφαρμογή

Να λύθουν οι ανισώσεις:

1) $3(x+1)-2>x+(x+1)$, **2)** $3(x+2)-1>x+2(x+3)$, **3)** $3(x-1)-3>x+2(x-4)$

Λύση

1) Είναι $3(x+1)-2>x+(x+1)$, οπότε $3x+3-2>2x+1$, επομένως $3x-2x>1-3+2$, άρα $x>0$.

2) Έχουμε $3(x+2)-1>x+2(x+3)$, οπότε $3x+6-1>3x+6$, επομένως $3x-3x>6-6+1$ που σημαίνει $0\cdot x>1$ που είναι αδύνατη.

3) Είναι $3(x-1)-3>x+2(x-4)$, οπότε $3x-3-3>3x-8$, επομένως $3x-3x>-8+3+3$, άρα $0\cdot x>-2$ που επαληθεύεται για κάθε πραγματικό αριθμό και λέγεται ταυτοτική ανισότητα.

Εξισώσεις και Ανισώσεις με απόλυτη τιμή

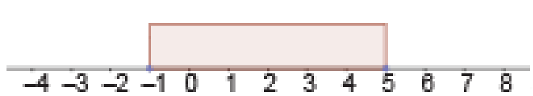
Ας θυμηθούμε τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού α και της απόλυτης τιμής της διαφοράς δύο αριθμών α, β που αναφέραμε στο 1ο κεφάλαιο (παράγραφος 1.2 του βιβλίου) και ας προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στις παρακάτω ασκήσεις κατανόησης

Ασκήσεις κατανόησης

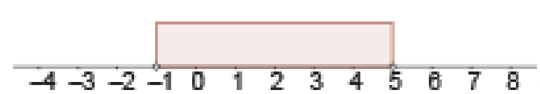
Α. Με απάντηση

1) Να διατυπώσετε λεκτικά την ανισότητα $|x-2|\geq 3$ και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις.

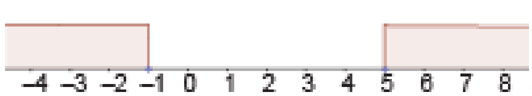
α)



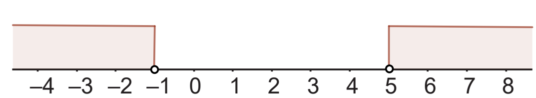
β)



γ)



δ)



ε) Τίποτα από τα παραπάνω

Απάντηση: «Η απόσταση των αριθμών x από το 2 είναι μεγαλύτερη ή ίση από 3 μονάδες». Η σωστή γεωμετρική αναπαράσταση είναι η γ).

Β. Για εξάσκηση

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ανισοτικών σχέσεων και των απολύτων τιμών θα επιλύσουμε εξισώσεις και ανισώσεις καθώς και προβλήματα με απόλυτες τιμές.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $|x| = 3$, ii) $|2x-1| = 3$, iii) $|1-3x| = 0$, iv) $|1-x| = -2$

ΛΥΣΗ

Επειδή η απόλυτη τιμή είναι μη αρνητικός αριθμός, για την επίλυση εξισώσεων της μορφής: $|f(x)| = κ$, όπου κ πραγματικός αριθμός, ακολουθούμε την εξής «στρατηγική»:
✓ Αν $κ \geq 0$, τότε $f(x) = κ$ ή $f(x) = -κ$. ✓ Αν $κ < 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Έτσι έχουμε:

i) $|x| = 3$, οπότε x = 3 ή $x = -3$

ii) $|2x-1| = 3$, επομένως $2x-1=3$ ή $2x-1=-3$, άρα $x=2$ ή $x=-1$

iii) $|1-3x| = 0$, δηλαδή $1-3x=0$, άρα $x = \frac{1}{3}$

iv) $|1-x| = -2$, άρα είναι αδύνατη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $|2x-1| = |x-5|$, ii) $|x-1| = 2|x-4|$

ΛΥΣΗ

Επειδή ίδια απόλυτη τιμή έχουν οι ίσοι ή οι αντίθετη αριθμοί, για την επίλυση εξισώσεων της μορφής: $|f(x)| = |g(x)|$, ακολουθούμε την εξής «στρατηγική»:

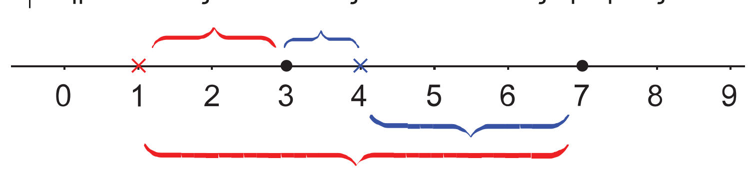
Αν $|f(x)| = |g(x)|$ τότε $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$ και αντιστρόφως.

Έτσι έχουμε:

i) $|2x-1| = |x-5|$, οπότε $2x-1 = x-5$ ή $2x-1 = -x+5$, άρα $x=-4$ ή $x=2$

ii) $|x-1| = 2|x-4|$, οπότε $|x-1| = |2x-8|$, δηλαδή $x-1 = 2x-8$ ή $x-1 = -2x+8$, επομένως
$-x = -7$ ή $3x = 9$, άρα $x=7$ ή $x=3$

Ειδικά για την εξίσωση $|x-1| = 2|x-4|$ μπορούμε να δώσουμε και γεωμετρική ερμηνεία αφού οι παραστάσεις $|x-1|$ και $|x-4|$ σημαίνουν τις αποστάσεις του x από τους αριθμούς 1 και 4 αντίστοιχα.



Έτσι στην αριθμογραμμή έχουμε ότι οι αριθμοί που απέχουν από τον αριθμό 1 διπλάσια απόσταση από τον αριθμό 4 είναι οι: 3 και 7.

Εφαρμογη 3

Να λυθεί η εξίσωση $|x+2| = 3-2x$.

Λυση

Επειδή η απόλυτη τιμή είναι μη αρνητικός αριθμός, για την επίλυση εξισώσεων της μορφής: $|f(x)| = g(x)$, ακολουθούμε την εξής «στρατηγική»:

✓ Αν $g(x) \geq 0$, τότε $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$.   ✓ Αν $g(x) < 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Έτσι έχουμε:

✓ Αν $3-2x < 0$, δηλαδή αν $x > \frac{3}{2}$, η εξίσωση είναι αδύνατη.

✓ Αν $3-2x \geq 0$, δηλαδή αν $x \leq \frac{3}{2}$, τότε $x+2 = 3-2x$ ή $x+2 = -3+2x$, οπότε $3x = 1$ ή $-x = -5$, που σημαίνει $x = \frac{1}{3}$ ή $x = 5$. Όμως $5 > \frac{3}{2}$, επομένως η λύση $x = 5$ απορρίπτεται. Άρα $x = \frac{1}{3}$.

Εφαρμογη 4

Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $|x| < 3$ **ii)** $|x-2| \leq 3$,   **iii)** $|2x-1| < 3$,

iv) $|1-3x| < -2$,   **v)** $|3x-1| \leq 0$,

vi) $|2x-1| \geq 3$,   **vii)** $|3x-1| \geq -2$

Λυση

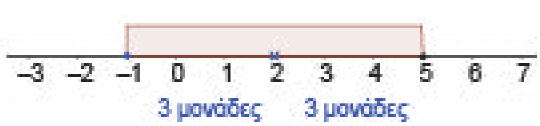
Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής ως «απόσταση» για την επίλυση ανισώσεων με απόλυτα ακολουθούμε την εξής «στρατηγική»:

- Αν είναι της μορφής: $|f(x)| < \kappa$ (1) ή $|f(x)| \leq \kappa$ (2) , όπου κ πραγματικός αριθμός, τότε:
  - ✓ αν $\kappa > 0$ τότε $-\kappa < f(x) < \kappa$ για την (1) και $-\kappa \leq f(x) \leq \kappa$ για την (2),
  - ✓ αν $\kappa \leq 0$ τότε η (1) είναι αδύνατη, ενώ η (2) ισχύει μόνο για $f(x) = 0$.
- Αν είναι της μορφής: $|f(x)| > \kappa$ (1) ή $|f(x)| \geq \kappa$ (2), τότε:
  - ✓ αν $\kappa > 0$ τότε $f(x) < -\kappa$ ή $f(x) > \kappa$ για την (1) και $f(x) \leq -\kappa$ ή $f(x) \geq \kappa$ για την (2),
  - ✓ αν $\kappa \leq 0$ τότε η (1) αν $\kappa \neq 0$ ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x, ενώ αν $\kappa = 0$ ισχύει μόνο για $f(x) \neq 0$, ενώ η (2) ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό.

Έτσι έχουμε:

i) $|x| < 3$, οπότε $-3 < x < 3$

ii) $|x-2| \leq 3$, επομένως $-3 \leq x-2 \leq 3$, που σημαίνει $-3+2 \leq x-2+2 \leq 3+2$, άρα $-1 \leq x \leq 5$



Την ανίσωση αυτή μπορούμε να λύσουμε και γεωμετρικά, αφού $|x-2| \leq 3$ σημαίνει ότι ο αριθμός x απέχει από τον 2 λιγότερο ή ίσο από 3 μονάδες, που σημαίνει ότι $-1 \leq x \leq 5$.

iii) $|2x-1|<3$, οπότε $-3<2x-1<3$, δηλαδή $-2<2x<4$, άρα $-1<x<2$.

iv) $|1-3x|<-2$, που είναι αδύνατη.

v) $|2x-1|\geq 3$, οπότε $2x-1<-3$ ή $2x-1>3$, επομένως $2x<-2$ ή $2x>4$, άρα $x<-1$ ή $x>2$.

vi) $|3x-1|\leq 0$, που ισχύει αν και μόνο αν $3x-1=0$, άρα $x=\frac{1}{3}$.

vii) $|3x-1|\geq -2$, που αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

Να λυθούν οι εξισώσεις: $|3x+5|=3x+5$, $|1-2x|=2x-1$

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας τον αλγεβρικό ορισμό της απόλυτης τιμής, η «στρατηγική» για να λύσουμε εξισώσεις της μορφής: $|f(x)|=f(x)$ (1) ή $|f(x)|=-f(x)$ (2), είναι:

- ✓ λύσεις της εξίσωσης (1) είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)\geq 0$ και
- ✓ λύσεις της εξίσωσης (2) είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)\leq 0$

Έτσι έχουμε:

i) $|3x+5|=3x+5$, επομένως $3x+5\geq 0$, άρα $x\geq -\frac{5}{3}$.

ii) $|1-2x|=2x-1$, οπότε $1-2x\leq 0$, άρα $x\geq \frac{1}{2}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x+2|$, με x οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό.

α) **Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.**

β) **Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθειά της να λύσετε γραφικά την ανίσωση $|x+2|\leq 3$**

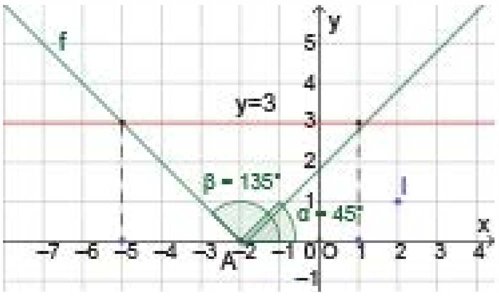
γ) **Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $|x+2|\leq 3$ και να επιβεβαιώσετε τα αποτελέσματα της γραφικής λύσης από το ερώτημα β).**

ΛΥΣΗ

α) Αν $x+2<0$, δηλαδή αν $x<-2$, τότε $f(x)=-x-2$, αν $x+2\geq 0$, δηλαδή αν $x\geq -2$, τότε $f(x)=x+2$.

Άρα $f(x)=\begin{cases}-x-2 & ,x<-2\\ x+2 & ,x\geq -2\end{cases}$

β) Η γραφική παράσταση είναι δύο ημιευθείες με αρχή το σημείο $A(-2,0)$ και σχηματίζουν με τον άξονα x΄x γωνίες με εφαπτομένη -1 και 1 δηλαδή γωνίες 135° και 45° αντίστοιχα. Η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η ανίσωση $|x+2|\leq 3$ σημαίνει $f(x)\leq 3$ και έχει λύσεις τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία



$y=3$ συμπεριλαμβανομένων των σημείων τομής της γραφικής παράστασης με την ευθεία $y=3$. είναι $-5\le x\le 1$.

γ) Η αλγεβρική επίλυση είναι $|x+2|\le 3$, οπότε $-3\le x+2\le 3$, επομένως $-3-2\le x\le 3-2$. Άρα $-5\le x\le 1$.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: ***ΕΦΑΡΜΟΓΗ 7*** *(Πρόβλημα διερευνητικής μάθησης/μοντελοποίησης).*

Ασκήσεις – Προβλήματα

1) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ,γ ισχύει:

α) $\alpha^2+\beta^2\ge 2\alpha\beta$ **β)** $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\ge\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$ **γ)** $\alpha^4+\beta^4\ge 2\alpha^2\beta^2$

δ) $\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}\le 1$ **ε)** $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\le\dfrac{1}{2}$, με $\alpha\ne 0$ και $\beta\ne 0$

2) Να αποδείξετε ότι:

α) Για κάθε $\alpha>0$ ισχύει $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\ge 2$ **β)** Για κάθε $\alpha<0$ ισχύει $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\le -2$

γ) Αν α, β ομόσημοι, τότε $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\ge 2$ **δ)** Αν α, β ετερόσημοι, τότε $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\le -2$

3) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, x, y ισχύει:

α) $3\alpha^2-2\alpha+1>0$ **β)** $\beta^2+6\beta+11>0$

γ) $\alpha^2+\beta^2+2\alpha+2\beta+2\ge 0$ **δ)** $(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2\ge 4(\alpha x+\beta y)$

4) **α)** Να δειχθεί ότι: $\alpha^2+\beta^2-2\alpha+4\beta+5=(\alpha-1)^2+(\beta+2)^2$

β) Να αποδείξετε ότι: $\alpha^2+\beta^2-2\alpha+4\beta+5\ge 0$

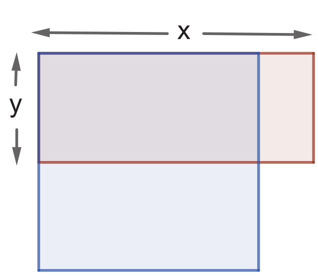
γ) Να αποδείξετε ότι, αν $\alpha^2+\beta^2-2\alpha+4\beta+5=0$, τότε $\alpha=1$ και $\beta=-1$

5) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει:

α) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\ge 0$ **β)** $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\ge 0$ **γ)** $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ge\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

6) Αν $3\le x\le 4$ και $2\le y\le 3$ να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις: **α)** $x+y$, **β)** $2x-3y$, **γ)** $\dfrac{x}{y}$, **δ)** x^2+y^2.

7) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει $5\le x\le 8$ και $1\le y\le 3$ τότε:



α) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν μειώσουμε το x κατά 1 και διπλασιάσουμε το y έτσι ώστε το σχήμα να είναι πάλι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογώνιου παραλληλογράμμου.

8) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $|1-3x|=4$ **β)** $|x-1|=|2x+3|$ **γ)** $|4x-1|=3|x+1|$ **δ)** $\left|x+\frac{1}{3}\right|=-1$

ε) $||x-2|-1|=3$ **στ)** $\frac{|x-1|}{|x-2|}=2$ **ζ)** $|3x+1|=4x-1$ **η)** $||x|-2|=x$

9) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{|x|-1}{2}-\frac{2-3|x|}{3}=\frac{1}{3}$ **β)** $1-\frac{|2x-1|-1}{4}=|1-2x|-\frac{|6x-3|-3}{8}$

γ) $|x-5|\cdot\sqrt{x^2-4x+4}=|5-x|$ **δ)** $x-4=\sqrt{x^2-4x+4}$ **ε)** $|x^2-2x+1|+|x^2-1|=0$

10) Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|2x-1|-7\le 0$ **ii)** $2\le|x+1|$ **iii)** $|-x-4|>0$ **iv)** $\frac{|x|}{6}+\frac{1}{3}>\frac{|x|}{2}-\frac{2}{3}$

v) $2|x+1|\le|-x-1|+3$ **vi)** $\sqrt{(x-1)^2}\ge 4$ **vii)** $|2x-4|+d(x,2)\le 12-|2-x|$

viii) $6<\sqrt{x^2-6x+9}+|2x-6|\le 15$

11) Να λύσετε τις εξισώσεις: **i)** $|3x+5|-3x=5$ **ii)** $\left|\frac{x}{2}-1\right|=\frac{x-2}{2}$

iii) $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$ **iv)** $\sqrt{4x^2-4x+1}=1-2x$

12) Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+2|<3$. **α)** να δείξετε ότι: $-5<x<1$

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $A=\frac{|x+5|+|x-1|}{2}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

13) Δίνονται οι ανισώσεις: $|x-1|>1$ και $|x+1|\le 4$

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο καθεμίας από τις ανισώσεις του ερωτήματος α) και να βρείτε τις κοινές λύσεις τους και **β)** να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας.

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x-3|$, x πραγματικός αριθμός

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f γίνεται: $f(x)=\begin{cases}-x+3 & ,x<3\\ x+3 & ,x\ge 3\end{cases}$

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και να λύσετε γραφικά την ανίσωση $|x-3|\ge 2$.

γ) Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $|x-3|\ge 2$ και να επιβεβαιώσετε τα αποτελέσματα της γραφικής λύσης από το ερώτημα β).

15) i) Να εκφράσετε με μια μεταβλητή τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς.

ii) Τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα μεγαλύτερο του 12 και μικρότερο του 17. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.

16) Ο Διονύσης κατασκευάζει ορθογώνιες κορνίζες. Η μια διάσταση είναι 80 εκατοστά με σφάλμα $\pm 0{,}5\,cm$ και η άλλη διάσταση 60 εκατοστά με σφάλμα $\pm 0{,}3\,cm$.

i) Να εκφράσετε το μαθηματικό μοντέλο της απόκλισης, των διαστάσεων από τις επιθυμητές τιμές.

ii) Να βρεθούν οι μικρότερες και μεγαλύτερες τιμές που μπορούν να πάρουν οι δύο διαστάσεις.

iii) Να βρεθεί μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται το εμβαδόν τους.

17) Μια εταιρεία συσκευάζει καφέ σε αεροστεγείς συσκευασίες. Κάθε πακέτο πρέπει να ζυγίζει 1600 γραμμάρια, αλλά το μηχάνημα συσκευασίας είναι δύσκολο να πετυχαίνει με ακρίβεια το επιθυμητό βάρος. Αν x το βάρος κάθε πακέτου, ο έλεγχος στη παραγωγή επιτρέπει να ισχύει $d(x,1600)\le 20$. Ποιο μπορεί να είναι το πιο βαρύ και ποιο το πιο ελαφρύ πακέτο καφέ που δεν απορρίπτει ο έλεγχος;

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο προκειμένου να απαντήσετε στο σύντομο test που προτείνεται.

4.3

Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

Τι καινούργιο υπάρχει στην παράγραφο

Με την ύλη της παραγράφου αυτής θα μάθουμε:

1) να επιλύουμε εξισώσεις της μορφής: $x^{\nu} = \alpha$,

2) να επιλύουμε αλγεβρικά εξισώσεις 2^{ου} βαθμού,

3) να επιλύουμε απλές εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2^{ου} βαθμού,

4) να χρησιμοποιούμε εξισώσεις 2^{ου} βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.

Απαραίτητες γνώσεις

1) Στο Γυμνάσιο μάθαμε να επιλύουμε απλές πολυωνυμικές εξισώσεις 2^{ου} βαθμού, ελλιπούς ή πλήρους μορφής, αλλά και μεγαλύτερου βαθμού με παραγοντοποίηση, καθώς και να επιλύουμε προβλήματα και εξισώσεις 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού με παραγοντοποίηση και να ερμηνεύουμε τις λύσεις στο πλαίσιο του προβλήματος.

2) Επίσης, στο 2^{ο} κεφάλαιο μάθαμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = \alpha x + \beta \quad \text{και} \quad f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \;\; \alpha \neq 0$$

Εισαγωγική δραστηριότητα

Ένας μάγος κατά τη διάρκεια μιας παράστασης ζητά από έναν θεατή:

– Μπορείτε να σκεφτείτε έναν θετικό ακέραιο αριθμό;

– Βεβαίως!

– Τετραγωνίστε τον αριθμό που σκεφτήκατε. Στη συνέχεια αφαιρέστε από το αποτέλεσμα το διπλάσιο του αριθμού που σκεφτήκατε αρχικά. Στο αποτέλεσμα αφαιρέστε τον αριθμό 3.

Ο θεατής σε πολύ λίγο απάντησε:

– Το αποτέλεσμα είναι 12.

Και ο μάγος απάντησε:

– Μήπως σκεφτήκατε το 5;

– Ναι, μάγος είσαι;

Όλοι οι θεατές χειροκρότησαν για το επίτευγμα του μάγου!

α) Εκφράστε ως συνάρτηση φ του x $\left(\varphi(x)\right)$ τις ενέργειες που ζήτησε ο μάγος από τον θεατή και παρατηρείστε ό,τι ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β) Αν ο μάγος έλεγε στους θεατές: «αφαιρέστε το 4» αντί «αφαιρέστε το 3», τι αποτέλεσμα θα πρόκυπτε, αν σκεφτόσασταν αρχικά πάλι το 5; Θα το έβρισκε τότε ο μάγος τον αριθμό που σκεφτήκατε;

γ) Για να καταλάβετε το «μαγικό», αποδείξτε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $\varphi(x) = (x-1)^2 - 4$

δ) Λύστε τώρα στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $\varphi(x) = 12$ και ερμηνεύστε το «μαγικό κόλπο».

ε) Αν καταλάβατε το μαγικό κόλπο κάντε το σε έναν φίλο ή φίλη σας.

Ας δούμε τι έχει προκύψει

Εξετάζουμε καταρχάς τις εξισώσεις της μορφής: $x^\nu = \alpha$, όπου ν θετικός ακέραιος και α οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Οι εξισώσεις αυτές λέγονται **διώνυμες εξισώσεις**. Η επίλυσή τους συνδέεται με όσα αναφέραμε στο 1ο κεφάλαιο στην παράγραφο 1.4 για τις νιοστές ρίζες πραγματικών αριθμών. Για παράδειγμα:

- $x^4 = 16$, οπότε $x = \sqrt[4]{16}$ ή $x = -\sqrt[4]{16}$, άρα $x = 2$ ή $x = -2$ **(δύο λύσεις)**
- $x^2 = -49$, που είναι αδύνατη **(καμία λύση)**
- $x^3 = 27$, οπότε $x = \sqrt[3]{27}$, άρα $x = 3$ **(μία λύση)**
- $x^5 = -32$, επομένως $-x^5 = 32$, δηλαδή $(-x)^5 = 32$, που σημαίνει $-x = \sqrt[5]{32}$, συνεπώς $x = -\sqrt[5]{32}$, άρα $x = -2$ **(μία λύση)**

Γενικεύοντας τώρα τα παραπάνω, έχουμε:

Εξίσωση $x^\nu = \alpha$ με α πραγματικό αριθμό και ν θετικό ακέραιο		
$\alpha \geq 0$	ν άρτιος	Δύο λύσεις: $x = \sqrt[\nu]{\alpha}$ ή $x = -\sqrt[\nu]{\alpha}$
	ν περιττός	Μία λύση: $x = \sqrt[\nu]{\alpha}$
$\alpha < 0$	ν άρτιος	Η εξίσωση είναι αδύνατη
	ν περιττός	Μία λύση: $x = -\sqrt[\nu]{\lvert\alpha\rvert}$

Συνέπεια των παραπάνω είναι οι σχέσεις:

➢ Για κάθε πραγματικό αριθμό α και ν άρτιο θετικό ακέραιο αριθμό ισχύει:

αν $x^\nu = \alpha^\nu$, τότε $x = \alpha$ ή $x = -\alpha$ και αντιστρόφως

➢ Για κάθε πραγματικό αριθμό α και ν περιττό θετικό ακέραιο αριθμό ισχύει:

αν $x^\nu = \alpha^\nu$, τότε $x = \alpha$ και αντιστρόφως

Ας δούμε τώρα πώς τα παραπάνω εφαρμόζονται στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων 2ου βαθμού, δηλαδή της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. Θυμηθείτε το μάγο της δραστηριότητας!

Για παράδειγμα, θα λύσουμε τις εξισώσεις: $2x^2 - 5x + 3 = 0$, $4x^2 - 4x + 1 = 0$ και $x^2 - 2x + 3 = 0$.

1) Για την $2x^2 - 5x + 3 = 0$ έχουμε:

- Διαιρώντας και τα δύο μέλη με 2 προκύπτει $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$, οπότε $x^2 - \frac{5}{2}x = -\frac{3}{2}$.
- Προσπαθώντας να δημιουργήσουμε το ανάπτυγμα της ταυτότητας: $(\alpha \pm \beta)^2$, εφαρμόζουμε τη μέθοδο **«συμπλήρωσης τετραγώνου»** και έχουμε $x^2 - 2\cdot\frac{5}{2\cdot 2}x = -\frac{3}{2}$, επομένως $x^2 - 2\cdot\frac{5}{4}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = -\frac{3}{2} + \left(\frac{5}{4}\right)^2$, που σημαίνει $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$, οπότε προκύπτει διώνυμη εξίσωση με $\nu = 2$.
- Επειδή $\frac{1}{16} > 0$ έχουμε $x - \frac{5}{4} = \sqrt{\frac{1}{16}}$ ή $x - \frac{5}{4} = -\sqrt{\frac{1}{16}}$, άρα $x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$ ή $x_2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1$.

(Παρατηρείστε ότι η διακρίνουσα Δ (βλ. παράγραφος 2.3 σελίδα 66) του τριωνύμου $2x^2 - 5x + 3$ είναι $\Delta = 1 > 0$).

2) Με όμοιο τρόπο για την $4x^2-4x+1=0$, έχουμε $4x^2-4x+1=0$, οπότε $x^2-x+\frac{1}{4}=0$, δηλαδή $x^2-x=-\frac{1}{4}$, που σημαίνει $x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x=-\frac{1}{4}$, επομένως $x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$, συνεπώς $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$, που σημαίνει $\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$, οπότε $x-\frac{1}{2}=0$ ή $x-\frac{1}{2}=0$, άρα $x_1=x_2=\frac{1}{2}$

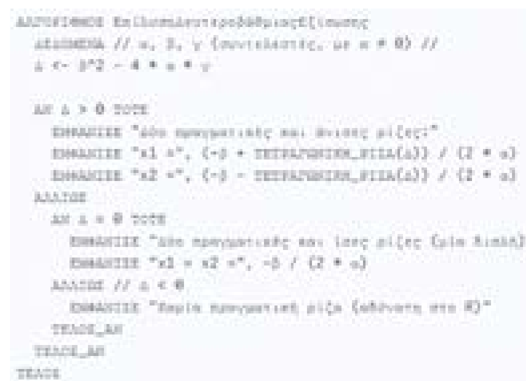
(Παρατηρείστε ότι η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου $4x^2-4x+1$ είναι Δ = 0).

3) Με όμοιο τρόπο για την $x^2-2x+3=0$ έχουμε: $x^2-2x=-3$, οπότε $x^2-2x+1=-3+1$, άρα $(x-1)^2=-2$ που είναι αδύνατη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

(Παρατηρείστε ότι η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου $x^2 - 2x + 3$ είναι $Δ = -8 < 0$).

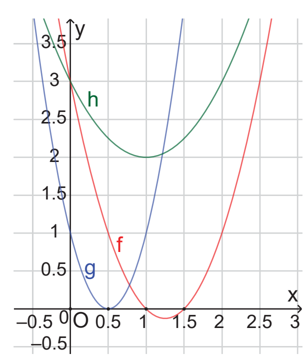
Γενικεύοντας τα παραπάνω έχουμε ότι:

Διακρίνουσα	**Είδος ριζών της εξίσωσης** $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\quad \alpha\neq 0$
Δ > 0	Η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες $x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
Δ = 0	Η εξίσωση έχει δύο ίσες πραγματικές ρίζες (μία διπλή) $x_1=x_2=-\frac{\beta}{2\alpha}(=x_0)$
Δ < 0	Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.



```
ΑΝ Δ > 0 ΤΟΤΕ
  ΕΜΦΑΝΙΣΕ "..."
  ΕΜΦΑΝΙΣΕ "x1 =", ...
  ΕΜΦΑΝΙΣΕ "x2 =", ...
ΑΛΛΙΩΣ
  ΑΝ Δ = 0 ΤΟΤΕ
    ΕΜΦΑΝΙΣΕ "..."
    ΕΜΦΑΝΙΣΕ "x1 = x2 =", ...
  ΑΛΛΙΩΣ // Δ < 0
    ΕΜΦΑΝΙΣΕ "..."
  ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
ΤΕΛΟΣ
```

Όπως αναφέραμε και στο 2ο κεφάλαιο, οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\quad \alpha\neq 0$ (αν υπάρχουν) είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με τον άξονα x΄x. Για παράδειγμα, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
$f(x)=2x^2-5x+3$, $g(x)=4x^2-4x+1$ και $h(x)=x^2-2x+3$
φαίνονται στο διπλανό σχήμα, με τις οποίες επιβεβαιώνουμε όσα βρήκαμε για τις ρίζες των εξισώσεων $f(x)=0$, $g(x)=0$ και $h(x)=0$.



Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΜΟΡΦΕΣ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ" - ΘΕΜΑΤΑ ΑΥΤΟΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ"

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΠΛΑΚΙΔΙΑ"

Αξιοσημείωτα σχόλια

1) Αν μια εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες (είτε ίσες είτε άνισες), δηλαδή έχει διακρίνουσα Δ μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός, τότε για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών ισχύουν τα εξής: $\mathbf{S=x_1+x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}+\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}}$,

$$\mathbf{P=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\cdot\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{(-\beta)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2}=\frac{(-\beta)^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}}$$ (Τύποι Vieta)

Οι τύποι (Vieta) μας δίνουν τη δυνατότητα να βρίσκουμε γρήγορα τις ρίζες μιας εξίσωσης 2ου βαθμού χωρίς την εφαρμογή των τύπων των ριζών.

Για παράδειγμα: οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-4x+3=0$ έχουν άθροισμα $S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{-4}{1}=4$ και γινόμενο $P=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{3}{1}=3$, οπότε είναι οι $x_1=1$ και $x_2=3$.

2) Άμεση συνέπεια των τύπων Vieta είναι το εξής:
Η εξίσωση $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0}$ **με** $\boldsymbol{\Delta\geq 0}$ γράφεται $\boldsymbol{x^2-S\cdot x+P=0}$.
Για παράδειγμα, η εξίσωση με ρίζες 5 και 2 είναι η $x^2-(5+2)x+5\cdot 2=0$, δηλαδή η $x^2-7x+10=0$ ενώ οι αριθμοί που έχουν άθροισμα 13 και γινόμενο 30 είναι οι ρίζες (αν υπάρχουν) της εξίσωσης $x^2-13x+30=0$, δηλαδή οι αριθμοί 10 και 3, όμως αριθμοί με άθροισμα 10 και γινόμενο 30 δεν υπάρχουν, αφού η εξίσωση $x^2-10x+30=0$ έχει διακρίνουσα αρνητική και είναι αδύνατη.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο (video): "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΑ"

Δραστηριότητα

Ποια είναι η συνθήκη, ώστε να υπάρχουν αριθμοί με άθροισμα S και γινόμενο P;

Ασκήσεις κατανόησης

Α. Με απάντηση

Να χαρακτηρίσετε ως Αληθείς ή Ψευδείς τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α) Η εξίσωση $x^{2024}=2025$ έχει δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες.

β) Η εξίσωση $x^5+5=0$ είναι αδύνατη.

γ) Αν α, γ ετερόσημοι αριθμοί η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ έχει δυο άνισες ρίζες.

δ) Η εξίσωση: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ έχει μια ρίζα ίση με το μηδέν, όταν η διακρίνουσα της είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν.

ε) Αν η εξίσωση: $x^2-\lambda x+1=0$, με λ πραγματικό αριθμό διάφορο του μηδενός έχει δύο ρίζες άνισες, τότε αυτές είναι αντίστροφες.

Απάντηση: **α)** *Αληθής,* **β)** *Ψευδής,* **γ)** *Αληθής,* **δ)** *Αληθής,* **ε)** *Αληθής*

Β. Για εξάσκηση

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Που χρησιμεύουν τα παραπάνω;

Με τη βοήθεια των παραπάνω θα λύνουμε εξισώσεις και προβλήματα που η επίλυσή τους ανάγεται σε επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού.

Λυμενες Εφαρμογες

Εφαρμογη 1

Να λυθούν οι εξισώσεις: **α)** $\boldsymbol{x^4-5x^2+4=0}$, **β)** $\boldsymbol{x^4-x^2-12=0}$, **γ)** $\boldsymbol{2x^4+5x^2+2=0}$

Λυση

Οι εξισώσεις αυτές λέγονται **διτετράγωνες** εξισώσεις και έχουν τη μορφή: $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$, με $\alpha\neq 0$. Για την επίλυση τους θέτουμε $x^2=y$ με $y\geq 0$ και επειδή η εξίσωση γράφεται $\alpha(x^2)^2+\beta x^2+\gamma=0$ θα λύσουμε την εξίσωση $\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$ (που την ονομάζουμε «επιλύουσα») και στη συνέχεια θα λύσουμε τις εξισώσεις $x^2=y$ για κάθε τιμή του y που βρήκαμε με $y\geq 0$.

Έτσι έχουμε:

α) Θέτουμε: $x^2=y$ με $y\geq 0$, λύνουμε την $y^2-5y+4=0$ που έχει λύσεις $y=4$ ή $y=1$. Οι λύσεις είναι και οι δύο δεκτές, οπότε $x^2=4$ ή $x^2=1$ δηλαδή $x_1=2$ ή $x_2=-2$ ή $x_3=1$ ή $x_4=-1$.
Άρα η εξίσωση έχει **4 διαφορετικές ρίζες**.

β) Θέτουμε: $x^2=y$ με $y\geq 0$, λύνουμε την $y^2-y-12=0$ που έχει λύσεις $y=-3$ ή $y=4$. Από τις λύσεις αυτές δεκτή είναι η $y=4$, οπότε έχουμε $x^2=4$ που σημαίνει $x=2$ ή $x=-2$.
Άρα η εξίσωση έχει **2 διαφορετικές ρίζες**.

γ) θέτουμε $x^2=y$ με $y\geq 0$, λύνουμε την $2y^2+5y+2=0$ που έχει λύσεις $y=-2$ ή $y=-\frac{1}{2}$. Οι τιμές αυτές δεν είναι δεκτές που σημαίνει ότι η εξίσωση είναι αδύνατη δηλαδή δεν έχει **καμία ρίζα**.

Εφαρμογη 2

Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $2x^2-9|x|+4=0$ β) Να λυθεί η εξίσωση $(x-1)^6-9(x-1)^3+8=0$

Λυση

α) Είναι $2x^2-9|x|+4=0$, επομένως $2|x|^2-9|x|+4=0$. Θέτουμε $|x|=y$ με $y\geq 0$ και λύνουμε την $y^2-5y+4=0$ που έχει ρίζες $y_1=1$ ή $y_2=4$, συνεπώς $|x|=4$ ή $|x|=1$ δηλαδή $x_1=2$ ή $x_2=-2$ ή $x_3=1$ ή $x_4=-1$. Άρα η εξίσωση έχει 4 διαφορετικές ρίζες.

β) Θέτουμε $(x-1)^3=y$ με y οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό και λύνουμε την $y^2-9y+8=0$ που έχει ρίζες $y=1$ ή $y=8$. Επομένως $(x-1)^3=1$ ή $(x-1)^3=8$ που σημαίνει $x-1=\sqrt[3]{1}$ ή $x-1=\sqrt[3]{8}$, άρα $x=2$ ή $x=3$.

Εφαρμογη 3

Να λυθεί η εξίσωση: $x+3+\frac{4-2x}{2-x}=0$.

Λυση

Καταρχάς θα βρούμε το σύνολο στο οποίο ορίζεται η εξίσωση δηλαδή, το ΣΥΝΟΛΟ ΟΡΙΣΜΟΥ της.
Πρέπει και αρκεί $2-x\neq 0$, δηλαδή $x\neq 0$. Άρα το σύνολο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}-\{2\}$. Έχουμε:

$x+3+\frac{4-2x}{2-x}=0$, οπότε $2x-x^2+6-3x+4-2x=0$, δηλαδή $x^2+3x-10=0$, επομένως $x=2$ ή $x=-5$.
Η λύση $x=2$ δεν ανήκει στο σύνολο ορισμού, οπότε απορρίπτεται, άρα $x=-5$.

Εφαρμογη 4

α) **Να λυθεί η εξίσωση: $(\lambda+1)x^2+\lambda x-1=0$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.**

β) **Να βρείτε τις τιμές της πραγματικής παραμέτρου λ, ώστε η εξίσωση $x^2-4x+2\lambda=0$ να:**
i) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, ii) έχει μία ρίζα διπλή iii) είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Λυση

α) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda+1=0$, δηλαδή $\lambda=-1$, τότε η εξίσωση γίνεται $-x-1=0$, άρα έχει μοναδική λύση $x=-1$.
- Αν $\lambda+1\neq 0$, δηλαδή $\lambda\neq -1$, τότε η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με $\Delta=(\lambda+2)^2\geq 0$ οπότε:
  - ✓ Για $\lambda\neq -1$ και $\lambda\neq -2$, είναι $\Delta>0$, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις:

$$x_1=\frac{-\lambda+\lambda+2}{2(\lambda+1)}=\frac{1}{\lambda+1} \quad \text{και} \quad x_2=\frac{-\lambda-\lambda-2}{2(\lambda+1)}=\frac{-2\lambda-2}{2(\lambda+1)}=\frac{-2(\lambda+1)}{2(\lambda+1)}=-1$$

  - ✓ Για $\lambda=-2$, είναι $\Delta=0$ οπότε η εξίσωση γίνεται $-x^2-2x-1=0$ ή $-(x+1)^2=0$ και έχει μία ρίζα διπλή, την $x=-1$.

β) Έχουμε α = 1, β = –4, γ = 2λ και Δ = 16 – 8λ.

i) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, αν και μόνο αν Δ > 0, δηλαδή $16-8\lambda>0$, άρα λ<2.

ii) Η εξίσωση έχει μία ρίζα διπλή, πραγματική, αν και μόνο αν Δ = 0, δηλαδή $16-8\lambda=0$, άρα λ = 2.

iii) Η εξίσωση είναι αδύνατη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, αν και μόνο αν Δ < 0, δηλαδή $16-8\lambda<0$, άρα λ > 2.

Εφαρμογη 5

Η ημερήσια παραγωγή 20 πηγαδιών άντλησης πετρελαίου είναι 4.000 βαρέλια. Για κάθε νέο πηγάδι που ανοίγεται η ημερήσια παραγωγή κάθε πηγαδιού μειώνεται κατά 5 βαρέλια.

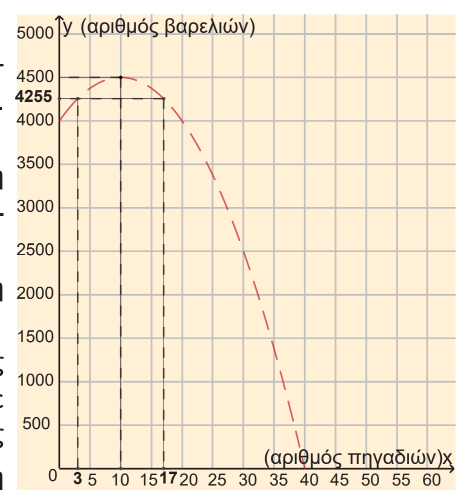
α) Να εκφράσετε με ένα μαθηματικό μοντέλο την ημερήσια παραγωγή κάθε πηγαδιού μετά το άνοιγμα x νέων πηγαδιών και να δώσετε τους περιορισμούς για τη μεταβλητή x.

β) Να εκφράσετε με ένα μαθηματικό μοντέλο τη συνολική παραγωγή (Π) σε συνάρτηση του αριθμού x των νέων πηγαδιών.

γ) Να βρείτε τον αριθμό των νέων πηγαδιών, ώστε η παραγωγή να είναι 4.255 βαρέλια ημερησίως.

δ) Να βρείτε πόσα πηγάδια πρέπει να ανοίξουν, ώστε να έχουμε τη μέγιστη δυνατή παραγωγή ημερησίως, την οποία και να προσδιορίσετε.

Λυση



α) Η αρχική παραγωγή κάθε πηγαδιού είναι $4000\div 20=200$ βαρέλια ημερησίως. Με το άνοιγμα x νέων πηγαδιών η παραγωγή y κάθε πηγαδιού γίνεται y = 200 – 5x βαρέλια ημερησίως. Όμως x > 0 και y = 200 – 5x >0 δηλαδή 0 < x < 40.

β) Μετά το άνοιγμα των x νέων πηγαδιών η συνολική παραγωγή γίνεται $\Pi(x)=(20+x)\cdot(200-5x)=-5x^2+100x+4000$ βαρέλια ημερησίως. Άρα $\Pi(x)=-5x^2+100x+4000$ με $0<x<40$.

γ) Λύνουμε την εξίσωση $-5x^2+100x+4000=4255$ δηλαδή $-5x^2+100x-255=0$ άρα $x=3$ ή $x=17$.

δ) Η συνάρτηση της συνολικής παραγωγής είναι της μορφής $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με α = –5 < 0, β = 10, γ = 4000, 0 < x < 40 με γραφική παράσταση σημεία που ανήκουν σε τμήμα παραβολής που παρουσιάζει μέγιστη τιμή για $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=10$. Άρα τη μέγιστη παραγωγή θα είναι Π(10) = 4.500 βαρέλια ημερησίως.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο (hot spot): "ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ ΚΑΙ ΕΥΘΕΙΑΣ"

*Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: **ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6** (Πρόβλημα διερευνιτικής μάθησης/μοντελοποίησης)*

Ασκήσεις και προβλήματα

1) Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x^4=16$, $x^4=-16$, $x^3=27$, $x^3=-64$

ii) $x^4+x=0$, $5x^7-5x^3=0$, $2027x+x^{2027}=0$

iii) $(x-1)^4=16$, $(2x+1)^3=8$

iv) $(x+3)^8=(x-1)^8$, $(2x+1)^5=(3x-1)^5$

v) $(x+2)^6-8(x+2)^3=0$

vi) $(|3-x|-5)^4=81$

2) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^2-7x+6=0$, $9x^2-6x+1=0$, $x^2-5x+7=0$

ii) $\dfrac{x^2+36}{8}=\dfrac{3x}{2}$, $\dfrac{x^2+2x}{2}=3x-2$, $1+(x-1)(x-3)=0$

iii) $\left(x^2-10x+25\right)\left(x^2-6x+5\right)=0$ **iv)** $(x-3)^2+x^2=27$ **v)** $x-\sqrt{x}=20$

3) Δίνεται η εξίσωση: $x^2+x-2=0$ (1).

α) Με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra ή οποιουδήποτε άλλου λογισμικού να σχεδιάσετε στο ίδιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = -x + 2$ και να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής τους.

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (με διαφορετικό χρώμα) τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = x^2 + x -2$ και να βρείτε τις τετμημένες των σημείων που τέμνει τον άξονα x΄x. Να συγκρίνετε τις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων f και g του ερωτήματος (α) με τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα x΄x.Τι παρατηρείτε ως προς τη σχέση που έχουν μεταξύ τους;

γ) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση (1) και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των ερωτημάτων α) και β).

δ) Να λύσετε την εξίσωση (1) γραφικά, χρησιμοποιώντας διαφορετικές συναρτήσεις από αυτές που αναφέρονται στο ερώτημα α).

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο "ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΜΗΣ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ"

4) **α)** Με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra ή οποιουδήποτε άλλου λογισμικού, να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2-4x+5$ και $g(x)=x-1$.

β) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $x^2-4x+5=x-1$.

γ) Να επαληθεύσετε και αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα β).

δ) Ποιες θα είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης $f(x)=x^2-5x+6$ με τον άξονα x΄x;

5) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^2-4x+3=0$ **β)** $x^2-4|x|+3=0$ **γ)** $x^4-4x^2+3=0$ **δ)** $(x-1)^2-4|x-1|+3=0$

ε) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=-3$ **στ)** $x-1-4\sqrt{x-1}+3=0$ **ζ)** $\dfrac{3x-1}{x-1}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-x}$

6) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x_2 + 7x - 11 = 0$ να βρείτε (χωρίς να υπολογίσετε τις ρίζες της) τις τιμές των παραστάσεων: x_1+x_2, $x_1\cdot x_2$, $x_1^2\cdot x_2+x_1\cdot x_2^2$, $x_1^2+x_2^2$, $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$, $(x_1-x_2)^2$

7) **α)** Για το τριώνυμο $x^2 -\kappa x - 2 = 0$, $\kappa\in\mathbb{R}$ αποδείξετε ότι $\Delta\geq 0$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 -\kappa x - 2 = 0$ (1).

i) Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1x_2$ των ριζών της (1),

ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2, όπου $\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$

8) Δύο βρύσες Α και Β γεμίζουν μαζί μια δεξαμενή σε 2 ώρες· έστω x και y οι ώρες που καθεμιά της γεμίζει μόνη της τη δεξαμενή. Γνωρίζουμε ότι η μια χρειάζεται 3 ώρες παραπάνω από την άλλη.

i) Να γράψετε τη σχέση των μεταβλητών x και y και να δώσετε τους περιορισμούς γι’ αυτές.

ii) Τι μέρος της δεξαμενής γεμίζει η καθεμιά βρύση μόνη της σε 1 ώρα;

iii) Να εκφράσετε με ένα μαθηματικό μοντέλο (εξίσωση) το πρόβλημα και να βρείτε τις τιμές των x, y.

9) Ένας άνδρας και μια γυναίκα ξεκινούν από το σημείο που συναντιόνται δυο κάθετοι ευθύγραμμοι δρόμοι για να τρέξουν. Και οι δύο απομακρύνονται από το σημείο αυτό, ο καθένας σε διαφορετικό δρόμο, με σταθερές ταχύτητες 8 km/h και 6 km/h αντίστοιχα.

i) Να εκφράσετε με ένα μαθηματικό μοντέλο την απόστασή τους h σε συνάρτηση με το χρόνο t.

ii) Αν h(t) = 10t μετά από πόσα λεπτά θα απέχουν μεταξύ τους 0,5 Km;

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στο σύντομο test που προτείνεται.

4.4
Ανισώσεις 2ου βαθμού

Τι καινούργιο υπάρχει στην παράγραφο

Με την ύλη της παραγράφου αυτής θα μάθουμε:

1) να επιλύουμε ανισώσεις 2^{ου} βαθμού αλγεβρικά ή/και γραφικά,

2) να αξιοποιούμε ανισώσεις 2^{ου} βαθμού στην επίλυση προβλημάτων,

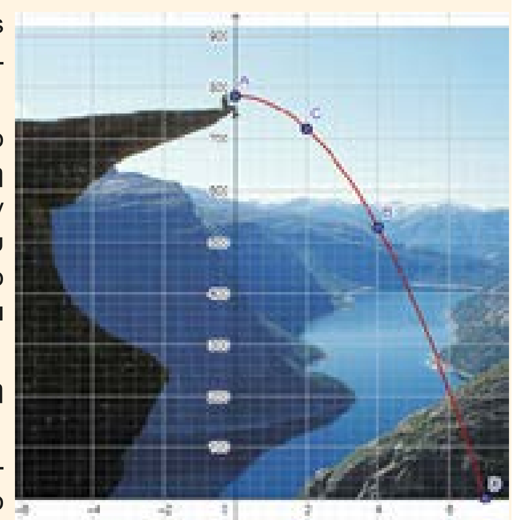
3) να κατασκευάζουμε δικά μας προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις ή/και ανισώσεις δευτέρου βαθμού.

Απαραίτητες γνώσεις

Θυμόμαστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0$

Εισαγωγική δραστηριότητα

Κατά τη διάρκεια των γυρισμάτων μιας ταινίας του James Bond, υπήρξαν μεταξύ άλλων δύο σκηνές που κατά το γύρισμά τους απαιτήθηκε ιδιαίτερη προσοχή:



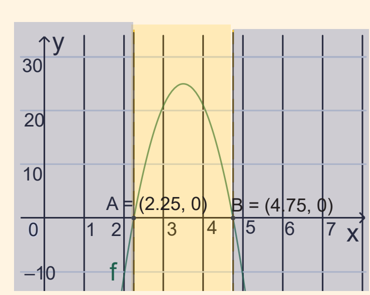
Σκηνή 1η: Ο ήρωας πρέπει να κάνει βουτιά στο κενό από βράχο ύψους 784 μέτρων. Για να είναι ασφαλής η πτώση του, θα πρέπει να ανοίξει το αλεξίπτωτό του από το ύψος των 720 μέτρων έως και το ύψος των 384 μέτρων. Η τροχιά που διαγράφει είναι παραβολική και γνωρίζουμε ότι διέρχεται από τα σημεία Α, Β, C, με συντεταγμένες: (0, 784), (4, 528) και (2, 720), αντίστοιχα.

i) Να βρείτε τη συνάρτηση που περιγράφει την παραβολική τροχιά του ήρωα.

ii) Να βρείτε, χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση, μεταξύ ποιων χρονικών στιγμών θα πρέπει να ανοίξει το αλεξίπτωτο, ώστε να είναι ασφαλής η πτώση του ήρωα στο ποτάμι;

Σκηνή 2η: Στο τέλος της ταινίας, όπου ο ήρωας έχει επιτύχει το στόχο του, εκτοξεύονται πυροτεχνήματα από το έδαφος, ενώ σε πολύ κοντινή απόσταση υπάρχει πλήθος που χειροκροτεί με ενθουσιασμό.

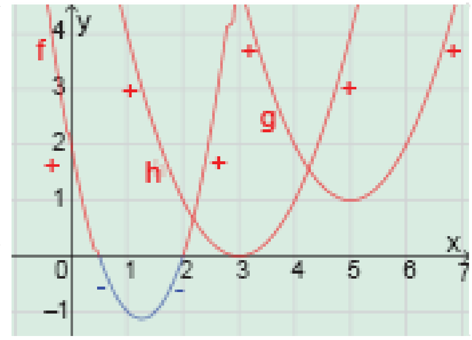
Η παραβολική τροχιά των πυροτεχνημάτων περιγράφεται από τη συνάρτηση $f(t) = -16t^2 + 112t + 29$ σε σχέση με τον χρόνο (σε δευτερόλεπτα), ενώ για την ασφάλεια των θεατών τα πυροτεχνήματα θα πρέπει να σβήσουν αφού φτάσουν σε ύψος το λιγότερο 200 μέτρα από το έδαφος.



iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά ότι μεταξύ των χρονικών στιγμών, από 2,25 μέχρι 4,75 δευτερόλεπτα, θα σβήσουν τα πυροτεχνήματα με ασφάλεια.

Ας δούμε τι έχει προκύψει

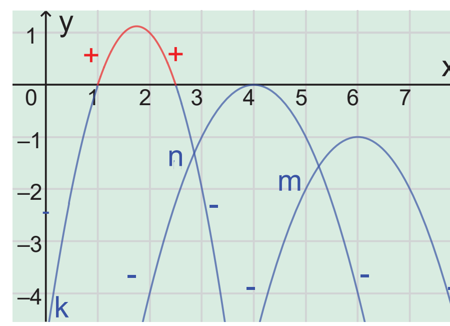
Με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra σχηματίζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
$f(x)=2x^2-5x+2$, $h(x)=x^2-6x+9$ και $g(x)=3x^2-4x+5$



Έχουμε το διπλανό σχήμα. Από τις γραφικές παραστάσεις διαπιστώνουμε ότι για το πρόσημο των τιμών των συναρτήσεων f, h και g ισχύουν τα εξής:

- Οι τιμές του τριωνύμου $f(x)=2x^2-5x+2$ είναι θετικές, αν $x<\frac{1}{2}$ ή x > 2 και αρνητικές αν $\frac{1}{2}<x<2$, ενώ για $x=\frac{1}{2}$ ή για x = 2 η τιμή του τριωνύμου είναι μηδέν.
- Οι τιμές του τριωνύμου $h(x)=x^2-6x+9$ είναι θετικές για κάθε τιμή του x εκτός του 3, ενώ για x = 3 η τιμή του τριωνύμου είναι μηδέν.
- Οι τιμές του τριωνύμου $g(x)=3x^2-4x+5$ είναι θετικές για κάθε τιμή του x.

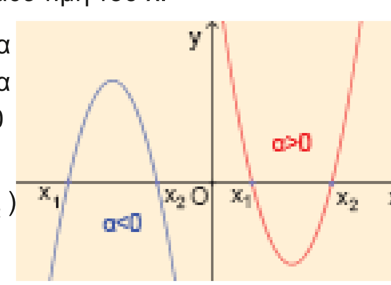
Με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra σχηματίζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
$\kappa(x)=-2x^2+7x-5$, $n(x)=-x^2+8x-16$ και $m(x)=-x^2+12x-37$
Έχουμε το διπλανό σχήμα.



Από τις γραφικές παραστάσεις διαπιστώνουμε ότι για το πρόσημο των τιμών των συναρτήσεων κ, n και m ισχύουν τα εξής:

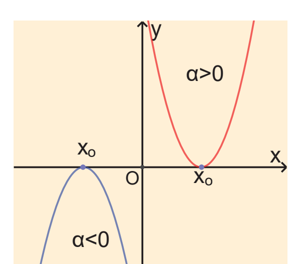
- Οι τιμές του τριωνύμου $\kappa(x)=-2x^2+7x-5$ είναι αρνητικές αν $x<1$ ή $x>\frac{5}{2}$ και θετικές αν $1<x<\frac{5}{2}$, ενώ για $x=1$ ή για $x=\frac{5}{2}$ η τιμή του τριωνύμου είναι μηδέν.
- Οι τιμές του τριωνύμου $n(x)=-x^2+8x-16$ είναι αρνητικές για κάθε τιμή του x εκτός από τη τιμή 4, ενώ για $x=4$ η τιμή του τριωνύμου είναι μηδέν.
- Οι τιμές του τριωνύμου $m(x)=-x^2+12x-37$ είναι αρνητικές για κάθε τιμή του x.

Γενικεύοντας τα συμπεράσματα από τα προηγούμενα παραδείγματα και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 2.3 για το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ισχύουν τα παρακάτω:



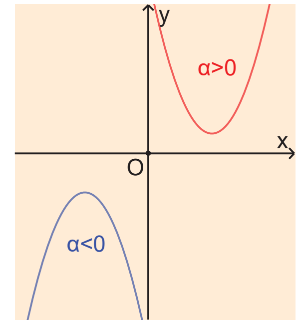
- Αν Δ > 0 τότε το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες x_1, x_2 (έστω $x_1<x_2$) οπότε:

Δ > 0 x	−∞		x_1		x_2		+∞
πρόσημο f(x)		ομόσημο του α	0	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α	



- Αν Δ = 0 τότε το τριώνυμο έχει μία διπλή ρίζα x_0 οπότε:

Δ = 0 x	−∞		x_0		+∞
πρόσημο f(x)		ομόσημο του α	0	ομόσημο του α	



- Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες οπότε:

$\Delta < 0$ x	$-\infty$ $+\infty$
πρόσημο f(x)	ομόσημο του α

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω έχουμε τελικά ότι οι τιμές ενός τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \ \alpha\neq 0$ είναι:

- **ετερόσημες του α**, μόνο όταν $\Delta > 0$ και για τις τιμές του x, που βρίσκονται μεταξύ των ριζών,
- **μηδέν**, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου,
- **ομόσημες του α**, σε κάθε άλλη περίπτωση.

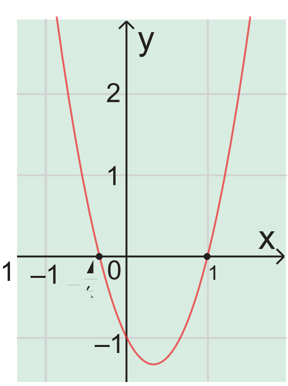
Ειδικά, το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \ \alpha\neq 0$ παίρνει τιμές:

- **ομόσημες του α για κάθε πραγματική τιμή του x,** αν η διακρίνουσα Δ είναι αρνητική και αντιστρόφως,
- **θετικές για κάθε πραγματική τιμή του x,** αν η διακρίνουσα Δ είναι αρνητική και το α είναι θετικό και αντιστρόφως,
- **αρνητικές για κάθε πραγματική τιμή του x,** αν η διακρίνουσα Δ είναι αρνητική και το α είναι αρνητικό και αντιστρόφως.

Ανισώσεις 2ου βαθμού

Η επίλυση των ανισώσεων 2ου βαθμού, δηλαδή των ανισώσεων της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$, $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0,\ \ \alpha x^2+\beta x+\gamma\geq 0,\ \ \alpha x^2+\beta x+\gamma\leq 0$ με $\alpha\neq 0$ και α, β, γ πραγματικούς αριθμούς, ανάγεται στην εύρεση του προσήμου του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq 0$.

Για παράδειγμα, για να λύσουμε τις ανισώσεις $3x^2-2x-1>0$, $25x^2+70x+49>0$ και $-3x^2+x-2>0$, θα μελετήσουμε το πρόσημο των αντιστοίχων τριωνύμων:



- Για το τριώνυμο $3x^2-2x-1$ έχουμε $\Delta=16>0$ και ρίζες $x_1=1$ και $x_2=\frac{1}{3}$.

  Άρα οι τιμές του τριωνύμου είναι θετικές, δηλαδή ομόσημες του $\alpha = 3 > 0$ αν και μόνο αν, το x παίρνει τιμές εξωτερικά των ριζών, δηλαδή για $x<\frac{1}{3}$ ή $x > 1$

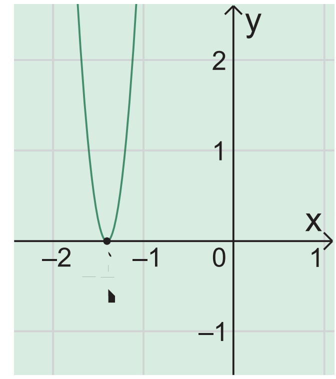
x	$-\infty$		1/3		1		$+\infty$
$3x^2-2x-1$		+	0	−	0	+	

  Άρα λύσεις της ανίσωσης $3x^2-2x-1>0$, όπως φαίνεται στον πίνακα, αλλά και στη γραφική παράσταση, είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί x που είναι μικρότεροι του $\frac{1}{3}$ ή μεγαλύτεροι του 1, δηλαδή $x<\frac{1}{3}$ ή $x>1$.

- Για το τριώνυμο $25x^2+70x+49$ έχουμε $\Delta=0$ και διπλή ρίζα $x=-\frac{7}{5}$.

  Άρα οι τιμές του τριωνύμου είναι θετικές, δηλαδή ομόσημες του $\alpha=25>0$ για κάθε πραγματική τιμή του x εκτός από την τιμή $-\frac{7}{5}$.

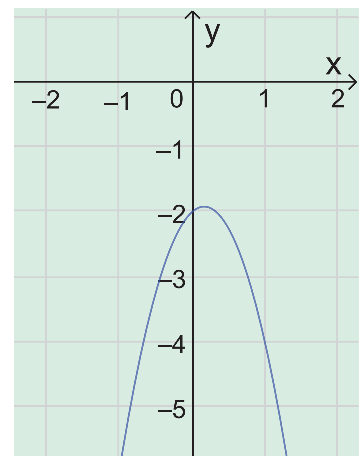
x	$-\infty$	$-7/5$	$+\infty$
$25x^2+70x+49$	+	0	+



Άρα λύσεις της ανίσωσης $25x^2+70x+49>0$ όπως φαίνεται στον πίνακα, αλλά και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=25x^2+70x+49$ είναι οποιοσδήποτε αριθμός $x\neq -\frac{7}{5}$.

- Για το τριώνυμο $-3x^2+x-2$ έχουμε: $\Delta=-23<0$. Άρα οι τιμές του τριωνύμου είναι αρνητικές, δηλαδή ομόσημες του $\alpha=-3<0$ για κάθε πραγματική τιμή του x.

x	$-\infty$	$+\infty$
$-3x^2+x-2$	–	



Άρα η ανίσωση $-3x^2+x-2>0$, όπως φαίνεται στον πίνακα, αλλά και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=-3x^2+x-2$ είναι **αδύνατη**.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΛΥΣΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΑΝΙΣΩΣΗΣ"

Ερωτήσεις κατανόησης

Α. Με απάντηση

1) Δίνεται το τριώνυμο x^2-7x+6 που έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 6.

Α) Να σχηματίσετε πίνακα προσήμων για το παραπάνω τριώνυμο:

x	$-\infty$	1		6	$+\infty$
x^2-7x+6	+	0	–	0	+

Β) Να χαρακτηρίσετε Αληθείς (Α) ή Ψευδείς (Ψ) τους παρακάτω ισχυρισμούς:

i) $A=\left(\frac{2027}{2026}\right)^2-7\cdot\frac{2027}{2026}+6<0$ **ii)** $B=\left(\frac{2026}{2027}\right)^2-7\cdot\frac{2026}{2027}+6<0$

iii) $\Gamma=\pi^2-7\cdot\pi+6>0$ **iv)** $\Delta=4\pi^2-14\cdot\pi+6>0$

v) $(3+\pi)^2-7\cdot(3+\pi)+6<0$ **vi)** Αν $1<x<6$ τότε $\left|x^2-7x+6\right|=x^2-7x+6$

Απάντηση: i) Α, **ii)** Ψ, **iii)** Ψ, **iv)** Α, **v)** Ψ, **vi)** Ψ

Β. Για εξάσκηση

1) Ένας μαθητής έλυσε την ανίσωση $(x-1)(x-2)>0$ ως εξής:
$(x-1)(x-2)>0$, που σημαίνει $x-1>0$ και $x-2>0$, οπότε $x>1$ και $x>2$, επομένως $x>2$. Άρα λύσεις της ανίσωσης το διάστημα $(2,+\infty)$.
Συμφωνείτε με τη λύση του μαθητή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

2) Μια μαθήτρια έλυσε την ανίσωση: $x^2\leq 4$ ως εξής:
$x^2\leq 4$ που σημαίνει $x\leq\pm\sqrt{4}$, οπότε $x\leq\pm 2$, επομένως $x\leq 2$ και $x\leq -2$, δηλαδή $x\leq -2$.
Άρα λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα $(-\infty,-2]$.
Συμφωνείτε με τη λύση της μαθήτριας; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

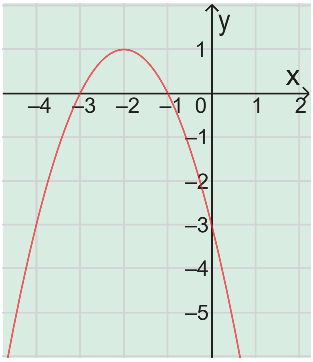
Με τη βοήθεια των παραπάνω συμπερασμάτων επιλύουμε ανισώσεις 2ου βαθμού, καθώς και ανισώσεις και προβλήματα που ανάγονται σε ανισώσεις 2ου βαθμού.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε το πρόσημο των τιμών των παρακάτω τριωνύμων για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x: **i)** $-x^2-4x-3$, **ii)** $9x^2-6x+1$, **iii)** $-2x^2+x-3$

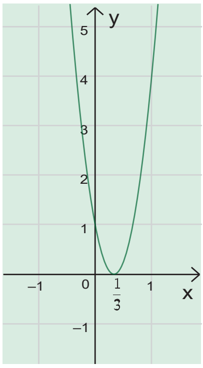
ΛΥΣΗ



i) Το τριώνυμο $-x^2-4x-3$ έχει $\alpha=-1<0$, $\Delta=4>0$ και ρίζες $x_1=-3$ ή $x_2=-1$. Άρα το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του x δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$-x^2-4x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

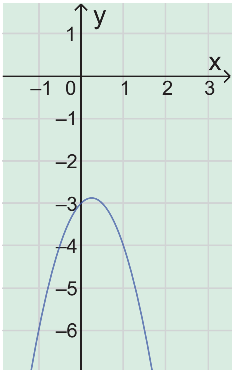
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=-x^2-4x-3$ επιβεβαιώνει τα παραπάνω συμπεράσματα



ii) Το τριώνυμο $9x^2-6x+1$ έχει Δ = 0 και διπλή ρίζα $x_0=\frac{1}{3}$. Οπότε οι τιμές του είναι θετικές, δηλαδή ομόσημες του α = 9 >0, για κάθε πραγματική τιμή του x, εκτός της τιμής $\frac{1}{3}$ για την οποία μηδενίζεται, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$1/3$		$+\infty$
$9x^2-6x+1$		$+$	0	$+$	

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 9x^2 - 6x + 1$ επιβεβαιώνει τα παραπάνω συμπεράσματα.



iii) Το τριώνυμο $-2x^2+x-3$ έχει $\Delta=-23<0$, οπότε οι τιμές του είναι αρνητικές δηλαδή ομόσημες του $\alpha=-2<0$, για κάθε πραγματική τιμή του x, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$+\infty$
$-2x^2+x-3$		$-$	

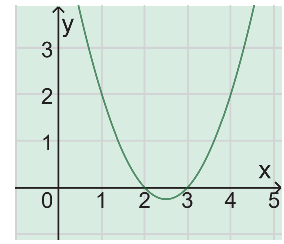
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=-2x^2+x-3$ επιβεβαιώνει τα παραπάνω συμπεράσματα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

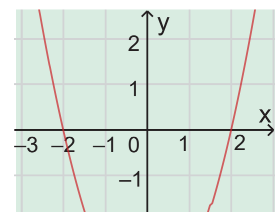
Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $x^2+6\geq 5x$ **β)** $x^2\leq 4$ **γ)** $x^2\leq 6x-9$ **δ)** $3x-5<2x^2$

ΛΥΣΗ



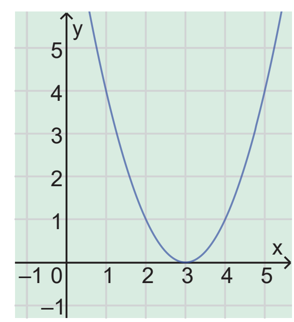
α) Είναι $x^2+6\geq 5x$, οπότε $x^2-5x+6\geq 0$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x^2-5x+6$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει ρίζες: $x_1=2$ και $x_2=3$, οπότε οι τιμές του είναι θετικές ή μηδέν (μη αρνητικές) αν και μόνο αν, το x παίρνει τιμές εξωτερικά των ριζών συμπεριλαμβανομένων και αυτών των ριζών, δηλαδή $x\leq 2$ ή $x\geq 3$.



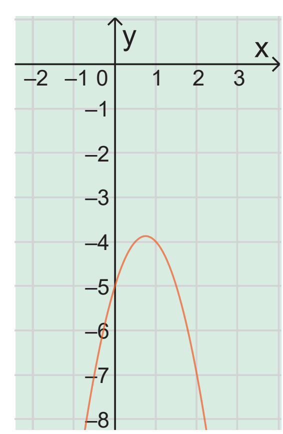
β) Είναι $x^2\leq 4$, οπότε $x^2-4\leq 0$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x^2-4$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το τριώνυμο x^2-4 έχει ρίζες $x_1=-2$ και $x_2=2$, οπότε οι τιμές του είναι αρνητικές ή μηδέν αν και μόνο αν, το χ παίρνει τιμές μεταξύ των ριζών συμπεριλαμβανομένων και των ριζών, δηλαδή $-2\leq x\leq 2$.

Ειδικά η ανίσωση αυτή μπορεί να λυθεί και ως εξής:

Είναι $x^2\leq 4$, οπότε $\sqrt{x^2}\leq\sqrt{4}$, επομένως $|x|\leq 2$, άρα $-2\leq x\leq 2$.



γ) Είναι $x^2\leq 6x-9$, οπότε $x^2-6x+9\leq 0$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x^2-6x+9$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το τριώνυμο x^2-6x+9 έχει διπλή ρίζα $x_0=-\frac{-6}{2}=3$, οπότε οι τιμές του είναι θετικές (ομόσημες του $\alpha=1>0$) ή μηδέν (δηλαδή μη αρνητικές) για κάθε πραγματική τιμή του x. Επομένως, η μόνη δεκτή τιμή του x για την οποία το τριώνυμο παίρνει τιμές αρνητικές ή μηδέν είναι η τιμή $x=3$ για την οποία το τριώνυμο έχει τιμή μηδέν.



δ) Είναι $3x-5<2x^2$, οπότε $-2x^2+3x-5<0$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=-2x^2+3x-5$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το τριώνυμο $-2x^2+3x-5$ δεν έχει ρίζες $(\Delta=-31<0)$, οπότε οι τιμές του είναι αρνητικές, δηλαδή ομόσημες του $\alpha=-2<0$ για κάθε πραγματική τιμή του χ. Άρα η ανίσωση $3x-5<2x^2$ αληθεύει για κάθε πραγματική τιμή του x (ταυτοτική ανισότητα).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Δίνεται η εξίσωση $3x^2-2(\lambda+1)x+\lambda+1=0$ (1), όπου λ πραγματικός αριθμός.

α) **Να δείξετε ότι η διακρίνουσα ισούται με $\Delta=4\lambda^2-4\lambda-8$.**

β) **Να μελετήσετε το πρόσημο του τριωνύμου $\lambda^2-\lambda-2$ για όλες τις πραγματικές τιμές του λ.**

γ) **Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση.**

- **i)** **έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες**
- **ii)** **έχει διπλή πραγματική ρίζα**
- **iii)** **δεν έχει πραγματικές ρίζες**

Λυση

Για την εξίσωση 2ου βαθμού (1) έχουμε:

α) $\alpha = 3,\ \beta = -2(\lambda+1),\ \gamma = \lambda+1$.

Άρα $\Delta = \left[-2(\lambda+1)\right]^2 - 4\cdot 3\cdot(\lambda+1) = 4\left[(\lambda^2+2\lambda+1) - 3(\lambda+1)\right] =$

$4(\lambda^2+2\lambda+1-3\lambda-3) = 4(\lambda^2-\lambda-2) = 8\lambda^2-4\lambda-8$

β) Για το τριώνυμο $\lambda^2-\lambda-2$ έχουμε $\alpha=1,\ \beta=-1,\ \gamma=-2$.

Επομένως $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 9 > 0$.

Άρα έχει δύο ρίζες άνισες τις $\lambda_1 = 2$ ή $\lambda_2 = -1$ και για το πρόσημό του έχουμε:

γ)
- Αν $\lambda < -1$ ή $\lambda > 2$ τότε $\lambda^2-\lambda-2>0$ (ομόσημο του α = 1 > 0).
- Αν $\lambda=-1$ ή $\lambda=2$ τότε $\lambda^2-\lambda-2=0$.
- Αν $-1<\lambda<2$ τότε $\lambda^2-\lambda-2<0$ (ετερόσημο του $\alpha=1>0$).

δ) Επειδή $\Delta = 4\lambda^2-4\lambda-8 = 4(\lambda^2-\lambda-2)$ το πρόσημο της διακρίνουσας είναι το πρόσημο του τριωνύμου $\lambda^2-\lambda-2$. Οπότε:
- η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες αν και μόνο αν Δ > 0, δηλαδή αν και μόνο αν $\lambda < -1$ ή $\lambda > 2$,
- η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες αν και μόνο αν Δ = 0, δηλαδή αν και μόνο αν $\lambda=-1$ ή $\lambda=2$,
- η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\Delta<0$, δηλαδή αν και μόνο αν $-1<\lambda<2$.

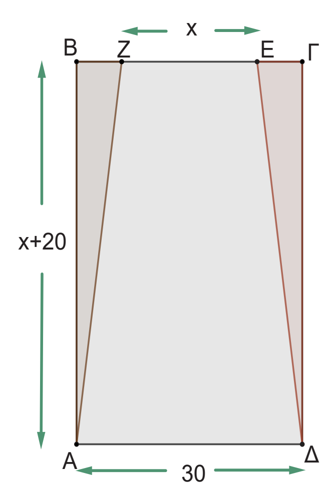
Εφαρμογη 4

Το διπλανό σχήμα αναπαριστά έναν καθρέπτη. Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ συμβολίζει το πλαίσιο του καθρέπτη και το τραπέζιο ΑΔΕΖ τον ίδιο τον καθρέπτη. Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΔΓΕ είναι διακοσμητικά κομμάτια ξύλου. Έχουμε ΑΔ = 30 cm και έστω ΕΖ = x cm και ΑΒ = x + 20 cm.

α) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x.

β) Να εκφράσετε με ένα μαθηματικό μοντέλο το εμβαδόν του καθρέπτη σε συνάρτηση του x.

γ) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του x ώστε ο καθρέπτης ΑΕΖΔ να έχει εμβαδόν μεγαλύτερο ή ίσο με τα 9/10 της συνολικής επιφάνειας ΑΒΓΔ.



Λυση

α) Πρέπει και αρκεί να είναι 0 < x < 30.

β) Το εμβαδόν της συνολικής επιφάνειας ΑΒΓΔ είναι $A\Delta\cdot AB = 30\cdot(x+20) = 30x+600$.

Το εμβαδόν του καθρέπτη (τραπεζίου) είναι $\dfrac{A\Delta+EZ}{2}\cdot AB = \dfrac{30+x}{2}(x+20) = \dfrac{1}{2}x^2+25x+300$.

γ) Πρέπει και αρκεί $\dfrac{1}{2}x^2+25x+300 \ge \dfrac{9}{10}(30x+600)$, επομένως $x^2-4x-480\ge 0$.

Το τριώνυμο $x^2-4x-480$ έχει $\alpha=1,\ \beta=-4,\ \gamma=-480$, $\Delta=1936$ και ρίζες τους αριθμούς -20 και 24. Οπότε οι τιμές του είναι ομόσημες του $\alpha=1>0$ ή μηδέν για $x\le -20$ ή $x\ge 24$.

Όμως $x>0$. Άρα η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το x είναι 24 εκατοστά.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: ***ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8*** *(Πρόβλημα διερευνητικής μάθησης/ μοντελοποίησης)*

Ασκήσεις και Προβλήματα

1) Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+x-2$, x πραγματικός αριθμός.

α) Να μελετήσετε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες πραγματικές τιμές του x.

β) Να δείξετε ότι: $\frac{\pi^2}{9}+\frac{\pi}{3}-2>0$ $(\pi\simeq 3{,}14...)$.

γ) Να αποδείξετε ότι αν $(|\alpha|+1)^2<3+|\alpha|$ τότε $-1<\alpha<1$.

2) Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $3x^2+5x-2\geq 0$ β) $-2x^2+7x+4>0$ γ) $16x^2-40x+25\leq 0$

δ) $3x^2-x+5>0$ ε) $-x^2+x-7\geq 0$ στ) $-3x^2+5x+8<0$

ζ) $(x-2)(3+x)\geq 0$ η) $(1-x)(2x-1)>0$

3) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων **α)** $f(x)=\sqrt{x^2+9x+8}$ και **β)** $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+1}}$.

4) **α)** Να λύσετε τις ανισώσεις: $x^2-7x+6<0$ και $-x^2-x+12\leq 0$. Στη συνέχεια να βρείτε τις κοινές λύσεις τους.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x^2+x-2|<4$.

5) Δίνεται η εξίσωση $3x^2-2(\lambda+1)x+\lambda+1=0$, με λ πραγματικό αριθμό.

i) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta=4\lambda^2-4\lambda-8$.

ii) Να μελετήσετε το πρόσημο του τριωνύμου $\lambda^2-\lambda-2$ για κάθε πραγματική τιμή του λ.

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης για τις διάφορες τιμές του λ.

iv) Για ποιες τιμές του λ οι ρίζες της εξίσωσης είναι ετερόσημες.

6) Δίνεται η ανίσωση $x^2-\alpha x>-x^2+5x-2$, όπου α πραγματικός αριθμός (παράμετρος). Να βρεθούν οι τιμές του α αν η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματική τιμή του x.

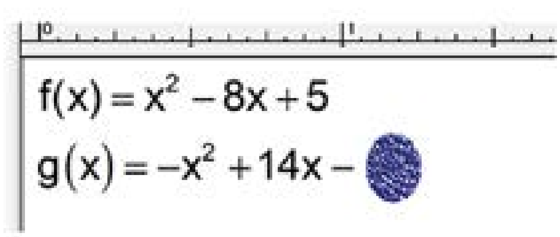
7) Δίνεται η ανίσωση $3\lambda x^2+2\lambda x+\lambda+2<0$, όπου λ πραγματικός αριθμός (παράμετρος) διάφορος του μηδενός. Να βρεθούν οι τιμές του λ, ώστε η ανίσωση να αληθεύει για κάθε πραγματική τιμή του x.

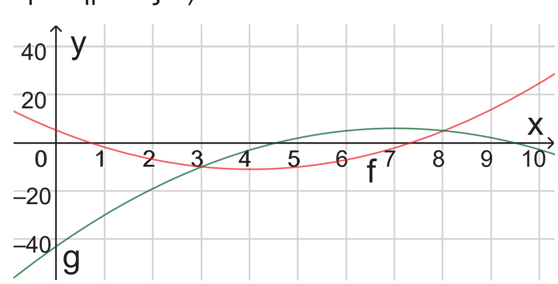
8) Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g των οποίων οι τύποι είναι γραμμένοι στην οθόνη ενός υπολογιστή που έχοντας μια μουτζούρα δεν φαίνεται καθαρά ο τελευταίος αριθμός στον τύπο της g.

α) Να βρείτε τον όρο που λείπει στον τύπο της g παρατηρώντας από τις γραφικές παραστάσεις ότι τέμνονται στο σημείο με τετμημένη 3.

β) Να βρείτε από τις γραφικές παραστάσεις τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά τα αποτελέσματα του ερωτήματος Β).





9) Σε μια παρέα 10 αγοριών και κοριτσιών το κάθε αγόρι δίνει δώρο σε όλα τα κορίτσια και κάθε κορίτσι δίνει δώρο σε κάθε αγόρι. Γνωρίζουμε ότι δόθηκαν πάνω από 48 δώρα.
Αν x και y τα αγόρια και τα κορίτσια της παρέας αντίστοιχα.

α) Να βρεθεί η σχέση των μεταβλητών x και y και να δώσετε κατάλληλους περιορισμούς γι' αυτές.
β) Να εκφράσετε με ένα μαθηματικό μοντέλο (ανίσωση) τα δεδομένα τους προβλήματος.
γ) Να βρείτε πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια είχε η παρέα.

10) α) Με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra (ή οποιουδήποτε άλλου λογισμικού), σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2-2x+1$ και $g(x)=-x+3$.

β) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $x^2-2x+1<-x+3$ (1) και να επαληθεύσετε αλγεβρικά τα αποτελέσματα της γραφικής λύσης.

γ) Να διατυπώσετε την εκφώνηση μιας άσκησης που θα ζητάτε τη γραφική λύση της ανίσωσης (1) χρησιμοποιώντας διαφορετικές συναρτήσεις από αυτές που ζητούνται στο ερώτημα α).

11) Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=x^2-5x+4$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\varphi(x)<0$.

β) Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου: $\varphi(1{,}5)\cdot\varphi(2)\cdot\varphi(2{,}5)\cdot\varphi(3)\cdot\varphi(3{,}5)$.

γ) Να διατυπώσετε ένα ερώτημα όμοιο με το ερώτημα β) χρησιμοποιώντας και θετικές και αρνητικές τιμές της συνάρτησης.

12) Ιταλική βιομηχανία παράγει scooters και θέλει να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της από την παραγωγή του μοντέλου «Mespa 125». Για λόγους αποθήκευσης η μηνιαία παραγωγή είναι μεταξύ 8 και 40 μονάδων. Το συνολικό μηνιαίο κόστος παραγωγής σε δεκάδες χιλιάδες ευρώ δίνεται από τη συνάρτηση $K(x)=0{,}1x^2-1{,}5x+8$, x θετικός ακέραιος αριθμός. Τα έσοδα εκφρασμένα σε δεκάδες χιλάδες ευρώ δίνονται από τη συνάρτηση $E(x)=2{,}4x-19$, x θετικός ακέραιος αριθμός.

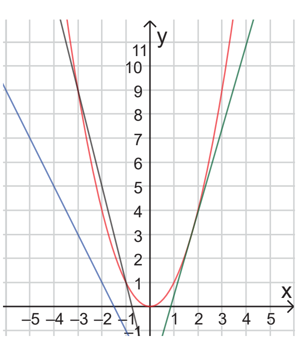
α) Υπολογίστε το κόστος και τα έσοδα για 8, 10 και 35 μονάδες παραγωγής.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές των μονάδων παραγωγής η βιομηχανία είναι κερδοφόρα και για ποιες θα παρουσιάζει έλλειμα

13) α) Να λύσετε την ανίσωση $|x^2+x-2|<4$.

β) Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $-2y^2+9y+5>0$ **ii)** $-2x^2-4x+9|x+1|+3>0$



14) Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $y=x^2$ και διάφορες ευθείες που διέρχονται από το σημείο $(0,-3)$. Πώς πρέπει να επιλέξουμε την κλίση μιας από τις ευθείες αυτές ώστε:

α) Να έχει δύο κοινά σημεία με την παραβολή.

β) Να εφάπτεται στην παραβολή.

γ) Να μην τέμνει τη παραβολή.

15) Η εταιρεία CampEq κατασκευάζει εξοπλισμό για camping. Το κέρδος από την κατασκευή και πώληση x αδιάβροχων μπουφάν ανά μήνα δίνεται από τον τύπο $P(x) = -0{,}8x^2 + 320x - 25200$, σε ευρώ. Πόσα μπουφάν θα πρέπει να κατασκευάζει και να πουλά κάθε μήνα η εταιρεία, ώστε να διατηρεί το κέρδος της πάνω από τις 2.000 ευρώ;

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στο σύντομο test που προτείνεται.

Ανακεφαλαιωση

Η εξίσωσης $\alpha x+\beta=0$	
$\alpha \neq 0$	Η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x=-\frac{\beta}{\alpha}$
$\alpha=0$ και $\beta \neq 0$	Η εξίσωση δεν έχει καμία λύση (αδύνατη στο $\mathbb{R}$)
$\alpha=0$ και $\beta=0$	Η εξίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό (αόριστη και ταυτοτική)

Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ με α πραγματικό αριθμό και ν θετικό ακέραιο		
$\alpha \geq 0$	ν άρτιος	Δύο λύσεις: $x=\sqrt[\nu]{\alpha}$ ή $x=-\sqrt[\nu]{\alpha}$
	ν περιττός	Μία λύση: $x=\sqrt[\nu]{\alpha}$
$\alpha<0$	ν άρτιος	Η εξίσωση είναι αδύνατη
	ν περιττός	Μία λύση: $x=-\sqrt[\nu]{\lvert\alpha\rvert}$
	Αν $x^\nu=\alpha^\nu$ τότε $x=\alpha$ ή $x=-\alpha$ ενώ αν $x^\nu=\alpha^\nu$ τότε $x=\alpha$ και αντιστρόφως	

Διακρίνουσα	Είδος ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\quad \alpha \neq 0$
$\Delta>0$	Η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες: $x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha},\quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta=0$	Η εξίσωση έχει δύο ίσες πραγματικές ρίζες (μία διπλή): $x_1=x_2=-\frac{\beta}{2\alpha}(=x_0)$
$\Delta<0$	Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες
	Τύποι VIETA: $S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}$, $P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$

$\Delta>0$ x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
πρόσημο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$		ομόσημο του α	0	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α	

$\Delta=0$ x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
πρόσημο $f(x)=\alpha^2+\beta x+\gamma$		ομόσημο του α	0	ομόσημο του α	

$\Delta<0$ x	$-\infty$		$+\infty$
πρόσημο $f(x)=\alpha^2+\beta x+\gamma$		ομόσημο του α	

Κριτηριο Αυτοαξιολογησης

Να λύσετε το ακόλουθο κριτήριο αξιολόγησης σε 90΄

ΘΕΜΑ Α

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται το πρόσημο των τιμών μιας συνάρτησης:
$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\quad \alpha\neq 0$.

x	$-\infty$	-8	2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	

Να χαρακτηρίσετε καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς ως Αληθείς ή Ψευδείς αιτιολογώντας σύντομα την απάντησή σας.

1) $f(-10)<0$

2) $f(-9)\geq f(1)$

3) $f(0)=2$

4) $\alpha<0$

5) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι οι αριθμοί: -8 και 2.

6) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<0$ είναι το διάστημα $[-8,2]$

ΘΕΜΑ Β

α) Πότε η εξίσωση: $x^2-\alpha x+\beta=0$ με α, β πραγματικούς αριθμούς έχει ρίζες;

β) Να γράψετε στη συνέχεια μια εξίσωση αυτής της μορφής που να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, μια που να έχει δύο ίσες πραγματικές ρίζες και μια που να είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

ΘΕΜΑ Γ

Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει λύσεις τους αριθμούς:

α) $3,\ -5$, **β)** $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}$ και **γ)** $2\alpha,\ 5\alpha$

ΘΕΜΑ Δ

Να λύσετε τις εξισώσεις και ανισώσεις:

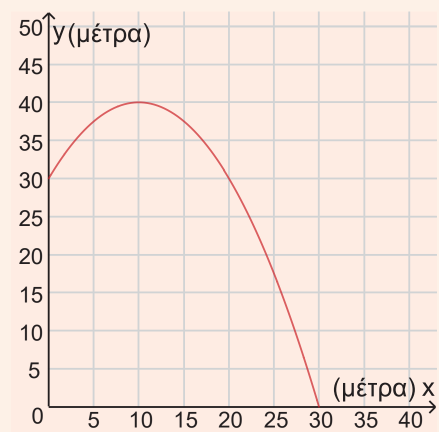
i) $-3x^2+12x=0$ **ii)** $2x^2+1{,}2x=-0{,}16$

iii) $(2x-1)(x+5)\geq 0$ **iv)** $x^2-9\geq 0$

v) $9x^2-6x+1<0$

ΘΕΜΑ Ε

Η τροχιά μιας πέτρας που ρίχνεται διαγώνια προς τα πάνω από έναν πύργο μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση $y=-0{,}1\cdot x^2+2x+30$
(x η οριζόντια απόσταση της πέτρας από το έδαφος, y το ύψος πάνω από το έδαφος, x, y σε μέτρα).



α) Σε ποια απόσταση από τον Πύργο χτυπά η πέτρα στο έδαφος;

β) Για ποιες τιμές της απόστασης από τον Πύργο το ύψος της πέτρας από το έδαφος είναι 37,5μ;

γ) Για ποιες τιμές της απόστασης από τον Πύργο το ύψος της πέτρας από το έδαφος είναι πάνω από 37,5μ;

ΘΕΜΑ ΣΤ

Δίνεται η παραβολή $y = 2x^2$ και η ευθεία $y=m\cdot x-2$, όπου m η κλίση της ευθείας.
Να βρεθούν οι τιμές της κλίσης της ευθείας ώστε:

α) Η ευθεία να εφάπτεται με την παραβολή.

β) Η ευθεία να τέμνει την παραβολή.

γ) Η ευθεία να μη τέμνει την παραβολή

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΣΤΑΥΡΟΛΕΞΟ"

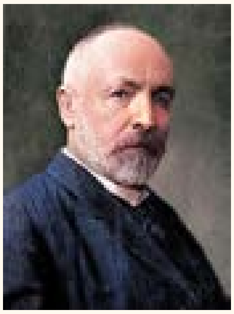
Κεφάλαιο 5ο

ΣΥΝΟΛΑ

Λέξεις κλειδιά: *σύνολα, πράξεις συνόλων, ένωση συνόλων, τομή συνόλων, συμπλήρωμα συνόλου*

Ιστορικό σημείωμα

Η έννοια του συνόλου εμφανίζεται από την αρχαιότητα σε όλους τους κλάδους των Μαθηματικών. Για παράδειγμα, στη Γεωμετρία, ορίζουμε ως μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος, το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν ίση απόσταση από τα άκρα του τμήματος. Όμως και σε καθημερινές εκφράσεις χρησιμοποιούμε την έννοια του συνόλου, όπως για παράδειγμα: «συλλογή νομισμάτων», «σμήνος μελισσών», «αποικία μυρμηγκιών» κ.λπ. Αντίστοιχα, σε πολλές περιπτώσεις συνηθίζουμε να επιλέγουμε διάφορα αντικείμενα και να τα ταξινομούμε σε ομάδες ή κατηγορίες. Για παράδειγμα, τα βιβλία μιας βιβλιοθήκης ανάλογα με το περιεχόμενο τους τα ταξινομούμε σε ιστορικά, λογοτεχνικά, ιατρικά κ.λπ.



Η συστηματική μελέτη των συνόλων άρχισε μόνο στα τέλη του 19ου αιώνα με την εργασία “Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre” (μτφ. «Συνεισφορές στη θεμελίωση των Υπερπεπερασμένων Συνόλων»), που δημοσιεύθηκε το 1895 στο περιοδικό Mathematische Annalen του Γερμανού μαθηματικού **G. Cantor** (1845- 1918).

Αλλά τι είναι τα σύνολα; Η ερώτηση είναι παρόμοια με την ερώτηση «τι είναι τα σημεία μιας ευθείας», την οποία ο Ευκλείδης απάντησε με το «σημεῖόν ἐστιν, οὖ μέρος οὐθέν». Αυτός δεν είναι βέβαια ένας αυστηρός μαθηματικός ορισμός, δηλαδή αναγωγή της έννοιας του σημείου σε γνωστές έννοιες, αλλά μια περιγραφή που μας πληροφορεί ότι το σημείο είναι κάτι που δεν έχει «έκταση».

Ο **John Venn** (1834-1923) ήταν Βρετανός μαθηματικός και είναι γνωστός για την ανάπτυξη των διαγραμμάτων Venn, μιας γραφικής αναπαράστασης της θεωρίας συνόλων. Σπούδασε μαθηματικά στο πανεπιστήμιο του Cambridge, όπου απέκτησε το πτυχίο του και το μεταπτυχιακό του. Το 1980 δημοσίευσε το βιβλίο του «The Logic of Chance», στο οποίο ανέπτυξε τη θεωρία του ότι η πιθανότητα πρέπει να γίνει κατανοητή από την άποψη της συχνότητας με την οποία συμβαίνουν τα γεγονότα μακροπρόθεσμα. Στο βιβλίο του «Symbolic Logic» εισήγαγε τα γνωστά διαγράμματα, ως οπτικό εργαλείο, χρησιμοποιώντας επικαλυπτόμενους κύκλους ή άλλα σχήματα για να αναπαραστήσει σχέσεις μεταξύ συνόλων και ομάδων αντικειμένων. Ο συγκεκριμένος τύπος διαγραμμάτων χρησιμοποιείται για την οπτική και λογική ταξινόμηση ομάδων αντικειμένων και των μεταξύ τους σχέσεων. Χρησιμοποιούνται ευρέως σε διάφορους τομείς συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών, της λογικής, της επιστήμης των υπολογιστών, της στατιστικής, ακόμη και σε τομείς όπως είναι οι επιχειρήσεις και το μάρκετινγκ. Κατά τη διάρκεια της πανδημίας, τα διαγράμματα Venn χρησιμοποιήθηκαν για την παράσταση των συμπτωμάτων της COVID-19, που δεν σχετίζονταν με τις εποχικές αλλεργίες.

Πηγές: *1) Katz, V. (2009). A History of Mathematics: An Introduction. Pearson Education.*
2) Venn, J. (1881). Symbolic Logic. Macmillan and Co.

5.1

Η έννοια του συνόλου

Τι καινούργιο υπάρχει στην παράγραφο

Με την ύλη της παραγράφου αυτής θα μάθουμε:

1) να αναγνωρίζουμε αν μια ιδιότητα ορίζει ένα σύνολο,

2) να αναπαριστάνουμε τα σύνολα με διάφορους τρόπους (αναγραφή, περιγραφή, διαγράμματα Venn),

3) να εξετάζουμε αν ένα αντικείμενο ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο και να δηλώνουμε τη σχέση συμβολικά.

Εισαγωγική δραστηριότητα

Στην καλλιτεχνική ομάδα της Α΄ Λυκείου (ζωγραφική, φωτογραφία, κινηματογράφος, θέατρο) ενός σχολείου ενδιαφέρονται να ενταχθούν 15 άτομα με τα εξής ονόματα:
Ανδρέας (Α), Βασίλης (Β), Γεωργία (Γ), Δήμητρα (Δ), Ελένη (Ε), Ζήνωνας (Ζ), Ηρώ (Η), Θάνος (Θ), Ιωάννα (Ι), Κώστας (Κ), Λουκία (Λ), Μαργαρίτα, (Μ), Νίκος (Ν), Ξενοφώντας (Ξ) και Όλγα (Ο).
Θέλουμε να οργανώσουμε και να παραστήσουμε την ομάδα των εικαστικών (ζωγραφική και φωτογραφία) με μαθηματικό τρόπο και διαθέτουμε τις παρακάτω πληροφορίες.

Π1: Οι Α, Γ, Δ, Η, Θ και Κ, Ν και Ξ δήλωσαν ότι τους αρέσει πολύ η τέχνη.

Π2: Οι Α, Β, Δ, Η, Ζ και Ι δήλωσαν ότι ασχολούνται πολύ με τη ζωγραφική

Π3: Οι Β, Γ, Ε, Η, Θ και Κ δήλωσαν ότι η φωτογραφία είναι μία αγαπημένη τους ενασχόληση.

1) Μπορούμε να επιλέξουμε άτομα για την ομάδα των εικαστικών με βάση την Π1;

2) Ποιες πληροφορίες μας επιτρέπουν να οργανώσουμε με σαφήνεια την ομάδα των εικαστικών;

3) Ποια είναι η σχέση της ομάδας των εικαστικών με την καλλιτεχνική ομάδα της Α΄Λυκείου;

4) Υπάρχουν μαθητές και μαθήτριες που θα ασχοληθούν και με τα δύο είδη των εικαστικών;

5) Με ποιους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να αναπαραστήσουμε την ομάδα των εικαστικών;

6) Ποια είναι η σχέση της μαθήτριας Μ με την ομάδα των εικαστικών;

Να δούμε τι έχει προκύψει

Σύμφωνα με τον G. Cantor:

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων που γίνονται αντιληπτά με την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι **καλώς ορισμένα** και **διακρίνονται μεταξύ τους**. Τα αντικείμενα αυτά που αποτελούν το σύνολο ονομάζονται **«στοιχεία ή μέλη»** του συνόλου.

Για παράδειγμα: τα ψηλά παιδιά μιας τάξης δεν αποτελούν «σύνολο» καθώς δεν είναι δυνατόν να διακρίνουμε με σιγουριά αν ένας μαθητής ανήκει στο σύνολο αυτό, ενώ οι μαθητές μιας τάξης που έγραψαν σ΄ ένα διαγώνισμα πάνω από 17 αποτελούν «σύνολο».

Τα σύμβολα «$\in$» και «$\notin$»: Για να δηλώσουμε ότι ένα στοιχείο x είναι στοιχείο του συνόλου Α χρησιμοποιούμε το σύμβολο «$\in$», γράφουμε: $x \in A$ και διαβάζουμε «το x **ανήκει** στο σύνολο Α», ενώ για να δηλώσουμε ότι ένα στοιχείο x δεν είναι στοιχείο του συνόλου Α χρησιμοποιούμε το σύμβολο «$\notin$», γράφουμε: $x \notin A$ και διαβάζουμε: «το x **δεν ανήκει** στο σύνολο Α». Για παράδειγμα, $\frac{3}{5} \notin \mathbb{N}, -\frac{1}{7} \in \mathbb{Q}, \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}, \sqrt{5} \in \mathbb{R}$.

Δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα σύνολο που δεν έχει στοιχεία και ονομάζεται **κενό** σύνολο και συμβολίζεται με { } ή με $\varnothing$. Για παράδειγμα, το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$ καθώς η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ είναι αδύνατη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Αναπαραστάσεις συνόλου. Ένα σύνολο το αναπαριστάνουμε με τους ακόλουθους τρόπους:

1ος τρόπος αναπαράστασης: Με αναγραφή των στοιχείων του

- Όταν ένα σύνολο έχει **λίγα** και **πεπερασμένα σε πλήθος** στοιχεία, τα αναγράφουμε ανάμεσα σε άγκιστρα χωρίζοντάς τα με κόμμα, μία φορά το καθένα και με οποιαδήποτε σειρά.

Για παράδειγμα το σύνολο των ημερών της εβδομάδας που ξεκινούν από Π είναι {Πέμπτη, Παρασκευή}, ενώ το σύνολο των γραμμάτων της λέξης σχολείο είναι {σ,χ,ο,λ,ε,ι}.

- Όταν ένα σύνολο έχει **πολλά ή άπειρα σε πλήθος στοιχεία,** χρησιμοποιούμε παρόμοιο συμβολισμό γράφοντας μέσα σε άγκιστρα μερικά από τα στοιχεία αυτά, παραλείποντας τα υπόλοιπα, αρκεί να είναι σαφές ποια είναι αυτά που δεν εμφανίζονται στην παράσταση του συνόλου. Για παράδειγμα:

  το σύνολο των διψήφιων φυσικών αριθμών γράφεται: {10,11,12,...,99}, το σύνολο των κλασμάτων της μορφής $\frac{1}{\nu}$ με ν φυσικό μεγαλύτερο του 1: $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...\right\}$, το σύνολο $\mathbb{Z}$: {...,–3,–2,–1,0,1,2,3...}

  Αυτός ο τρόπος αναπαράστασης ενός συνόλου λέγεται με **αναγραφή** των στοιχείων του. (Οι τρεις τελείες στην παράσταση ενός συνόλου υποδηλώνουν είτε ότι γνωρίζουμε το «μοτίβο», βάσει του οποίου συνεχίζουν τα στοιχεία του, είτε ότι το σύνολο έχει άπειρα στοιχεία).

2ος τρόπος αναπαράστασης: Με περιγραφή των στοιχείων του.

Αν από ένα σύνολο Ω, επιλέξουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα Ι, τότε φτιάχνουμε το νέο σύνολο που συμβολίζεται με: $\{x \in \Omega \,/\, \text{το x έχει την ιδιότητα I}\}$ και διαβάζεται: «Το σύνολο των στοιχείων x του Ω τέτοια, ώστε το x να έχει την ιδιότητα Ι».

Για παράδειγμα, το σύνολο {–2, 2} γράφεται με περιγραφή $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = 4\}$, όπως επίσης το σύνολο των ρητών αριθμών: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{x}{y} \,/\, x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0\right\}$ που δεν αναπαριστάνεται με αναγραφή των στοιχείων του.

Αυτός ο τρόπος αναπαράστασης ενός συνόλου λέγεται με **περιγραφή** των στοιχείων του.

Τα σύνολα τα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα της ελληνικής ή λατινικής αλφαβήτου: Α, Β, Γ, L, Q, …, ενώ τα γνωστά σύνολα αριθμών τα συμβολίσαμε με:

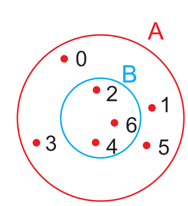
1) το σύνολο των Φυσικών αριθμών: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$,
2) το σύνολο των Ακεραίων αριθμών: $\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$,
3) το σύνολο των Ρητών αριθμών: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{x}{y} \,/\, x, y \in \mathbb{Z},\ y \neq 0\right\}$,
4) το σύνολο των Πραγματικών αριθμών το συμβολίζουμε με **R** και περιέχει όλους τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς.

Στη περίπτωση που τα παραπάνω σύνολα δεν περιέχουν το μηδέν γράφουμε: $\mathbb{N}^* = \{1,\ 2,\ 3,\ldots\}$ ή συμβολικά $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

Ίσα σύνολα: Δυο σύνολα Α και Β λέγονται **ίσα**, όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Γράφουμε: $A = B$

Για παράδειγμα, τα σύνολα $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = 9\}$ και $B = \{-3, 3\}$ είναι ίσα.

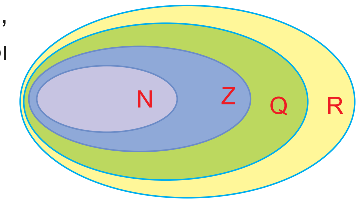
Η έννοια του υποσυνόλου: Έστω το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x < 7\} = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ και το σύνολο $B = \{2,4,6\}$. Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου Β είναι και στοιχείο του συνόλου Α. Τότε λέμε ότι το σύνολο Β είναι **υποσύνολο** του συνόλου Α και γράφουμε: $B \subseteq A$. Στη περίπτωση που το σύνολο Α έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο που δεν ανήκει στο Β, τότε λέμε ότι το σύνολο Β είναι **γνήσιο υποσύνολο** του συνόλου Α και γράφουμε: $B \subset A$. Γενικά:



Ένα σύνολο Α λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου Β, αν κάθε στοιχείο του συνόλου Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β και συμβολίζουμε $A \subseteq B$. Ισχύει ότι $A \subseteq B$ σημαίνει $A \subset B$ ή $A = B$.

Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου. Για παράδειγμα, αν $A = \{1,2,3\}$, τότε όλα τα υποσύνολα του συνόλου Α είναι: $\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\},\varnothing$.

Επίσης, για τα σύνολα: $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$, ως υποσύνολα του βασικού συνόλου $\mathbb{R}$, έχουμε: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$. Από τον ορισμό του υποσυνόλου προκύπτουν οι ιδιότητες:



1) $A\subseteq A$: Ανακλαστική ιδιότητα

2) Αν $A\subseteq B$ και $B\subseteq \Gamma$ τότε $A\subseteq\Gamma$: Μεταβατική ιδιότητα

3) Αν $A\subseteq B$ και $B\subseteq A$ τότε $A=B$: Αντισυμμετρική ιδιότητα

Βασικό σύνολο: Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός **βασικού συνόλου,** που συνήθως το συμβολίζουμε με Ω.

Παραδείγματα

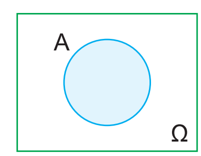
1) Για το σύνολο A των άρτιων αριθμών και σύνολο B των περιττών αριθμών, ως βασικό σύνολο Ω θεωρείται το σύνολο των ακεραίων και γράφουμε: $A=\{x\in\mathbb{Z}/x \text{ άρτιος}\}$ ή $B=\{x\in\mathbb{Z}/x \text{ περιττός}\}$.

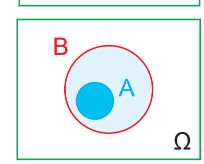
2) Για το σύνολο A των φωνηέντων και το σύνολο B των συμφώνων ως βασικό σύνολο θεωρείται το σύνολο Ω των γραμμάτων της αλφαβήτου.

3) Στα αριθμητικά σύνολα ως βασικό σύνολο συνήθως θεωρείται το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Έτσι, για το σύνολο A των θετικών πραγματικών αριθμών θα γράφουμε $A=\{x\in\mathbb{R}/x>0\}$.

3^{ος} τρόπος αναπαράστασης: Με χρήση Διαγραμμάτων Venn.

Ένας απλός τρόπος για την παρουσίαση των σχέσεων μεταξύ των συνόλων, αλλά και των μεταξύ τους πράξεων είναι τα **διαγράμματα** του Άγγλου μαθηματικού **John Venn** (1834-1923).





- Το βασικό σύνολο Ω, συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου, ενώ κάθε υποσύνολό του παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης γραμμής που περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου.
- Αν το A είναι υποσύνολο του B, τότε το A παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης γραμμής, που περιέχεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης γραμμής που παριστάνει το B.

Πλήθος στοιχείων ενός συνόλου: Ένα σύνολο A λέγεται **πεπερασμένο,** όταν το πλήθος των στοιχείων του είναι φυσικός αριθμός, τον οποίο ονομάζουμε **πληθικό** αριθμό ή **πληθάριθμο** του συνόλου A και συμβολίζεται με N(A), ενώ ένα σύνολο που δεν είναι πεπερασμένο λέγεται **μη πεπερασμένο** ή **άπειρο σύνολο**.

Παραδείγματα

- Τα $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ με $N(A)=10$ και $B=\{x\in\mathbb{Z}/1\le x\le 2\}=\{1,2\}$ με $N(B)=2$ είναι **πεπερασμένα**.
- Το $A=\{x\in\mathbb{R}/1<x<2\}$ καθώς και το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι **μη πεπερασμένα**.
- Το κενό σύνολο έχει πληθικό αριθμό μηδέν, δηλαδή $N(\varnothing)=0$.

Ασκήσεις Κατανόησης

Α. Με απάντηση

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε σύνολο της στήλης Α, τον πληθικό του αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α) $A=\varnothing$	1) $N(A)=7$
β) $A=\{x/x:\text{φωνήεν}\}$	2) $N(A)=4$
γ) $A=\{x/x:\text{σύμφωνο}\}$	3) $N(A)=2$
δ) $A=\{x/x:\text{ημέρα της εβδομάδας από Τ}\}$	4) $N(A)=17$
	5) $N(A)=0$

α	β	γ	δ
5	1	4	3

Β. Για εξάσκηση

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω έννοιες αναπαριστάνουμε τα σύνολα με διάφορους τρόπους, εξετάζουμε αν ένα αντικείμενο ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο και να βρίσκουμε τη σχέση δύο συνόλων δηλώνοντάς τη συμβολικά.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Θεωρούμε το σύνολο Α με στοιχεία τα γράμματα της λέξης ΚΡΗΤΗ και Β το σύνολο με στοιχεία τα γράμματα της λέξης ΚΡΗΤΙΚΟΣ.

α) Να αναπαραστήσετε τα σύνολα Α και Β.

β) Βρείτε το πλήθος των στοιχείων τους.

γ) Να χαρακτηρίσετε τις σχέσεις ως «Αληθείς» ή ως «Ψευδείς» i) $\Sigma \in A$ ii) $A \subset B$

ΛΥΣΗ

α) $A = \{K,P,H,T\}$, $B = \{K,P,H,T,I,O,\Sigma\}$ β) $N(A) = 4$, $N(B) = 7$

γ) i) Το γράμμα Σ δεν ανήκει στη λέξη ΚΡΗΤΗ, άρα $\Sigma \notin A$ επομένως η πρόταση είναι λανθασμένη.

ii) Κάθε στοιχείο του συνόλου Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β, άρα $A \subseteq B$. Επιπλέον, για το γράμμα Ο έχουμε $O \in B$, όμως $O \notin A$, συνεπώς $A \neq B$. Τελικά $A \subset B$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να αναπαραστήσετε με αναγραφή ή περιγραφή καθένα από τα παρακάτω σύνολα και να τα χαρακτηρίσετε ως πεπερασμένα ή άπειρα:

α) το σύνολο όλων των ακεραίων, που είναι μεγαλύτεροι του –3 και μικρότεροι ή ίσοι του 4,

β) το σύνολο όλων των θετικών – περιττών – ακεραίων,

γ) το σύνολο όλων των θετικών – άρτιων – ακεραίων.

ΛΥΣΗ

α) $A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x \leq 4\} = \{-2,-1,0,1,2,3,4\}$, πεπερασμένο.

β) $B = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$, άπειρο.

γ) $\Gamma = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$, άπειρο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

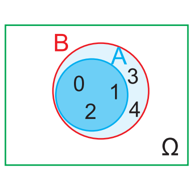
α) Να χρησιμοποιήσετε διάγραμμα Venn, για να παραστήσετε τα σύνολα Α = {0,1,2}, Β = {0,1,2,3,4}, όπου Ω ένα βασικό σύνολο.

β) Να συμπληρώσετε το διάγραμμα Venn ώστε το βασικό σύνολο Ω να είναι το:

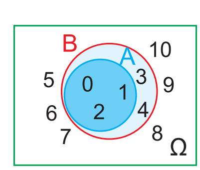
Ω = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}.

ΛΥΣΗ

α)



β)



5.2
Πράξεις συνόλων

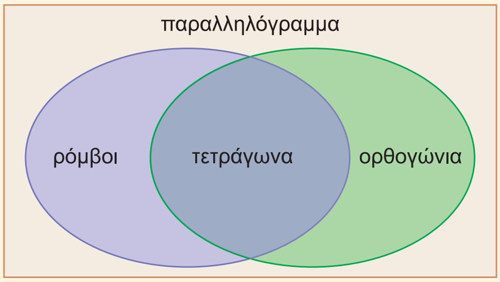
Τι καινούργιο υπάρχει στην παράγραφο

Με την ύλη της παραγράφου αυτής θα μάθουμε να αναγνωρίζουμε και να δηλώνουμε σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων, με χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων, καθώς και λεκτικά με κατάλληλη χρήση των συνδέσμων «ή» και «και».

Εισαγωγικές Δραστηριότητες

1. Χρησιμοποιήστε το παρακάτω διάγραμμα Venn και αναφερθείτε στις σχέσεις μεταξύ παραλληλογράμμων, ορθογωνίων, ρόμβων και τετραγώνων, όπως τις έχετε γνωρίσει στην Ευκλείδεια Γεωμετρία:

Για παράδειγμα: Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια, ενώ όλα τα ορθογώνια δεν είναι τετράγωνα.



2. Θεωρούμε τα σύνολα:

Α = { θεατές που παρακολούθησαν από το Ολυμπιακό Στάδιο την τελετή έναρξης των Ολυμπιακών Αγώνων, Αθήνα 2004}

Β = { θεατές που παρακολούθησαν από το Ολυμπιακό Στάδιο την τελετή λήξης των Ολυμπιακών Αγώνων, Αθήνα 2004}

Σε ποιο σύνολο ανήκει ένας θεατής που παρακολούθησε:

i) και τις δύο τελετές;
ii) μία τουλάχιστον τελετή;
iii) την τελετή έναρξης και όχι την τελετή λήξης;

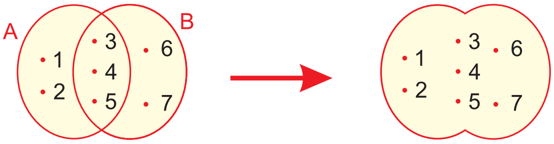
Να δούμε τι έχει προκύψει

Όπως ορίζουμε πράξεις μεταξύ αριθμών και δημιουργούμε νέους αριθμούς, έτσι και με τα σύνολα ορίζουμε ανάλογες πράξεις. Τα διαγράμματα του Venn παρέχουν έναν απλό και διαισθητικό τρόπο κατανόησης εννοιών, όπως η τομή, η ένωση και το συμπλήρωμα. Επιτρέπουν την οπτικοποίηση των λογικών σχέσεων μεταξύ διαφορετικών συνόλων ή κατηγοριών, καθιστώντας τα πολύτιμο εργαλείο για την επίλυση και την ανάλυση δεδομένων.

Ένωση Δύο Συνόλων

Έστω τα σύνολα: $A=\{1,2,3,4,5\}$ και $B=\{3,4,5,6,7\}$.

Αν σχηματίσουμε το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία των συνόλων Α, Β θα έχουμε το σύνολο: $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

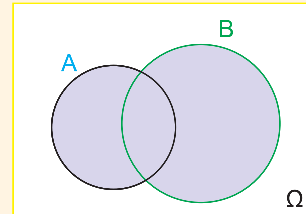


Το σύνολο αυτό ονομάζεται **«ένωση»** των συνόλων Α, Β συμβολίζεται: $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Θεωρώντας ένα βασικό σύνολο Ω και $A,B\subseteq\Omega$ τότε:

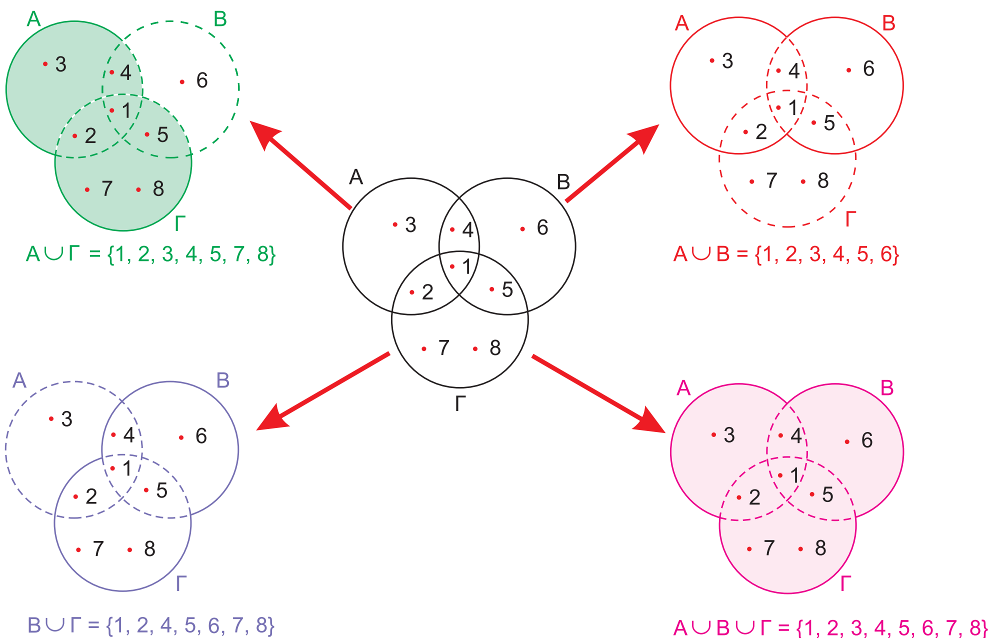
Ένωση των υποσυνόλων Α, Β του Ω, είναι το σύνολο των στοιχείων του Ω, το οποίο έχει στοιχεία που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα σύνολα Α και Β. Συμβολίζεται με:

$$A \cup B = \{x \in \Omega \,/\, x \in A \text{ ή } x \in B\}$$



Παράδειγμα

Αν $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,4,5,6\}$, $\Gamma = \{1,2,5,7,8\}$ τα σύνολα: $A \cup B$, $A \cup \Gamma$, $B \cup \Gamma$, $A \cup B \cup \Gamma$ φαίνονται από τα γραμμοσκιασμένα χωρία.



Σχόλιο

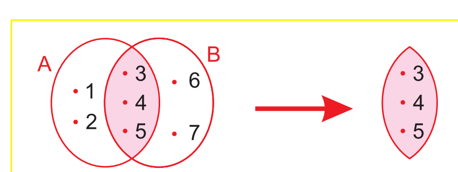
Παρατηρούμε ότι στον ορισμό της ένωσης δυο συνόλων χρησιμοποιήσαμε τον διαζευκτικό σύνδεσμο **«ή»** μεταξύ των προτάσεων « $x \in A$ », « $x \in B$ ». Στα μαθηματικά, αλλά και στην γλώσσα μας, όταν βάζουμε τον διαζευκτικό σύνδεσμο «ή» μεταξύ δύο προτάσεων p, q σχηματίζουμε τη σύνθετη πρόταση «p **ή** q». Η νέα πρόταση λέγεται **«διάζευξη»** και αληθεύει, αν αληθεύει τουλάχιστον μια από τις προτάσεις p, q.

Τομή Δύο Συνόλων

Έστω τα σύνολα $A = \{1,2,3,4,5\}$ και $B = \{3,4,5,6,7\}$.

Αν σχηματίσουμε το σύνολο που αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων Α, Β θα έχουμε το σύνολο: $\{3,4,5\}$.

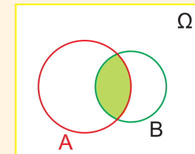
Το σύνολο αυτό ονομάζεται **«τομή»** των συνόλων Α, Β συμβολίζεται: $A \cap B = \{3,4,5\}$.



Θεωρώντας ένα βασικό σύνολο Ω και $A, B \subseteq \Omega$ τότε:

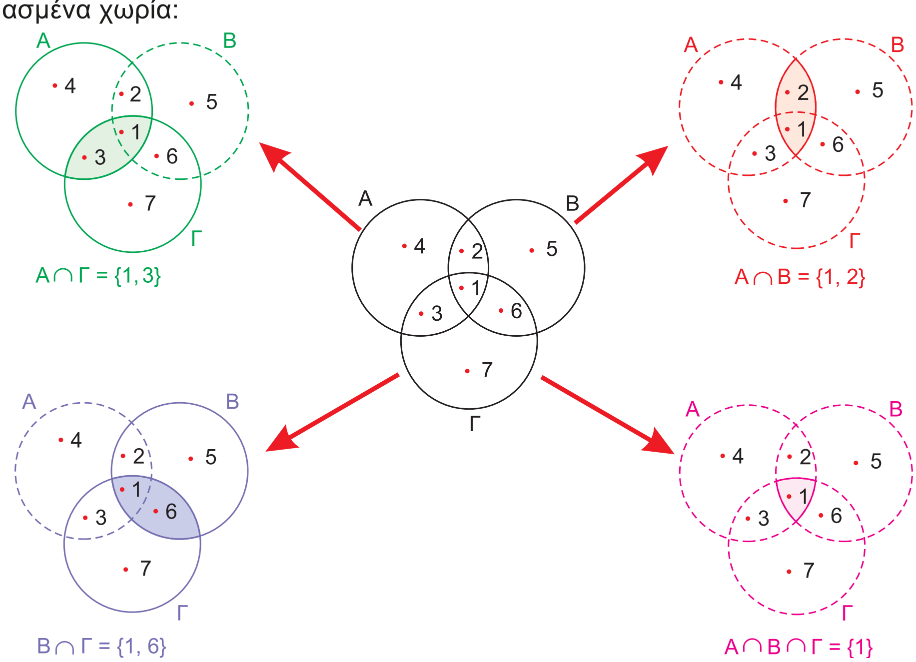
Τομή των υποσυνόλων Α, Β του Ω είναι το σύνολο των στοιχείων του Ω που έχει στοιχεία που ανήκουν και στα δύο σύνολα Α και Β και συμβολίζεται με:

$$A \cap B = \{x \in \Omega \,/\, x \in A \text{ και } x \in B\}$$



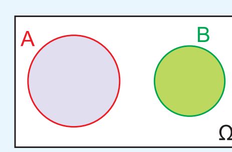
Παράδειγμα

Αν $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,5,6\}$ και $\Gamma = \{1,3,6,7\}$ τα σύνολα: $A \cap B$, $A \cap \Gamma$, $B \cap \Gamma$, $A \cap B \cap \Gamma$ φαίνονται από τα γραμμοσκιασμένα χωρία:



Σχόλια

1. Όταν δύο σύνολα Α και Β δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή ισχύει $A \cap B = \varnothing$, τότε λέγονται **ξένα μεταξύ τους**.



2. Παρατηρούμε ότι στον ορισμό της τομής δυο συνόλων χρησιμοποιήσαμε τον συμπλεκτικό σύνδεσμο **«και»** μεταξύ των προτάσεων «$x \in A$»,«$x \in B$». Στα μαθηματικά, αλλά και στην γλώσσα μας, όταν βάζουμε το συμπλεκτικό σύνδεσμο «και» μεταξύ δύο προτάσεων p, q σχηματίζουμε τη σύνθετη πρόταση «p **και** q». Η νέα πρόταση λέγεται **«σύζευξη»** και αληθεύει, αν αληθεύουν και οι δύο προτάσεις p, q.

Συμπλήρωμα ενός Συνόλου

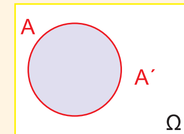
Έστω βασικό σύνολο $\Omega = \{1,2,3,...,10\}$ και $A = \{1,3,5,7,9\} \subseteq \Omega$.

Αν σχηματίσουμε το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν είναι στοιχεία του Α, έχουμε το σύνολο $\{2,4,6,8,10\}$.

Το σύνολο αυτό ονομάζεται **«συμπλήρωμα το Α»** και συμβολίζεται A'.

Θεωρώντας ένα βασικό σύνολο Ω και $A \subseteq \Omega$ τότε:

Συμπλήρωμα του συνόλου Α, ονομάζουμε το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν είναι στοιχεία του Α και το συμβολίζουμε με: $A' = \{x \in \Omega \,/\, x \notin A\}$
.

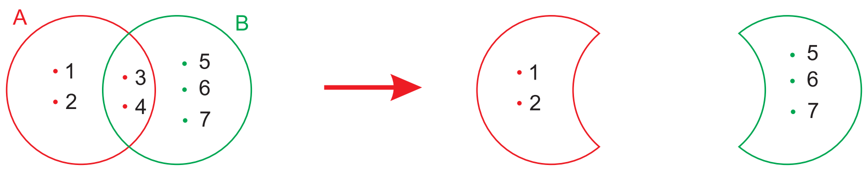


Για παράδειγμα, το συμπλήρωμα του συνόλου των φωνηέντων (με βασικό σύνολο των γραμμάτων της αλφαβήτου) είναι το σύνολο των συμφώνων.

Αξιόλογες σχέσεις: • $\Omega' = \varnothing$, • $A \cap A' = \varnothing$, • $A \cup A' = \Omega$, • $(A')' = A$, για κάθε $A \subseteq \Omega$.

Διαφορά Δύο Συνόλων

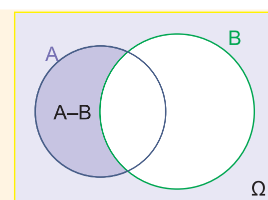
Θεωρώντας πάλι τα σύνολα $A = \{1,2,3,4,5\}$ και $B = \{3,4,5,6,7\}$, ας σχηματίσουμε το σύνολο που έχει τα στοιχεία του Α που δεν είναι στοιχεία του Β, καθώς και το σύνολο που έχει τα στοιχεία του Β που δεν είναι στοιχεία του Α:



Τα σύνολα αυτά είναι: $A - B = \{1,2\}$ και $B - A = \{5,6,7\}$ και λέγονται, το **Α – Β διαφορά του συνόλου Β από το σύνολο Α, το $B - A$ διαφορά του συνόλου Α από το Β.**
Γενικά:

Διαφορά του συνόλου Β από το Α λέγεται το σύνολο, το οποίο έχει τα στοιχεία του Ω που είναι στοιχεία του Α και δεν είναι στοιχεία του Β και συμβολίζεται με

$$A - B = \{x \in \Omega \,/\, x \in A \text{ και } x \notin B\}$$

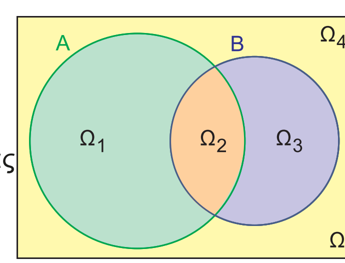


Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο "ΟΔΗΓΙΕΣ ΚΑΙ ΑΡΧΕΙΑ ΓΙΑ 3D ΕΚΤΥΠΩΣΗ ΓΙΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ "

Ερωτήσεις κατανόησης

Α. Με απάντηση

Με βάση το διπλανό διάγραμμα Venn να καθορίσετε τα σύνολα:
α) $A \cap B$, **β)** A', **γ)** B', **δ)** $(A \cup B)'$, **ε)** $(A \cap B)'$ χρησιμοποιώντας τα χωρία Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 όπως στο παράδειγμα $A \cup B$: Ω_1, Ω_2, Ω_3.



Απάντηση: **α)** Ω_2, **β)** Ω_3, Ω_4, **γ)** Ω_1, Ω_4, **δ)** Ω_4, **ε)** Ω_1, Ω_3, Ω_4

Β. Για εξάσκηση

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στις ασκήσεις που προτείνονται.

Σε τι χρησιμεύουν τα παραπάνω

Καθώς ορίσαμε πράξεις μεταξύ συνόλων, χρησιμοποιούμε τα διαγράμματα Venn για να οπτικοποιήσουμε τα αποτελέσματα των πράξεων και τις μεταξύ τους σχέσεις.
Οι πράξεις των συνόλων χρησιμοποιούνται σε πολλές περιοχές των μαθηματικών (π.χ. συναρτήσεις, πιθανότητες κ.ά.). Επίσης τα διαγράμματα Venn αξιοποιούνται και στην καθημερινή ζωή.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

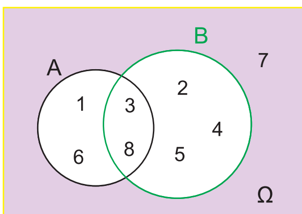
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Έστω το βασικό σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Να αναπαραστήσετε με αναγραφή και με διάγραμμα Venn την τομή των συνόλων Α και Β σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

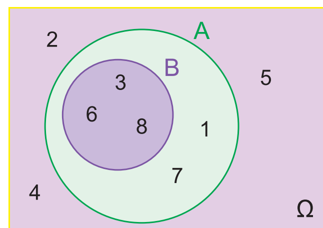
α) $A = \{1, 3, 6, 8\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 8\}$ **β)** $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$, $B = \{3, 6, 8\}$ **γ)** $A = \{2, 4, 8\}$, $B = \{1, 3, 5\}$

ΛΥΣΗ

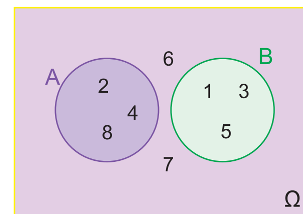
α) $A \cap B = \{3, 8\}$



β) $A \cap B = \{3, 6, 8\} = B$

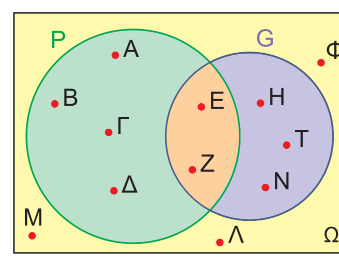


γ) $A \cap B = \varnothing$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο διπλανό διάγραμμα Venn φαίνονται τα σύνολα των μαθητών ενός Ωδείου (Ω) σε σχέση με τα όργανα πιάνο (P), κιθάρα (G) που μαθαίνουν. Τα στοιχεία των συνόλων αναφέρονται με τα αρχικά γράμματα του ονόματος των παιδιών.



Α) **Να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων και με αναγραφή τα παρακάτω σύνολα.**

- **i)** **το σύνολο των παιδιών που μαθαίνουν πιάνο,**
- **ii)** **το σύνολο των παιδιών που δεν μαθαίνουν κιθάρα,**
- **iii)** **το σύνολο των παιδιών που μαθαίνουν πιάνο ή κιθάρα,**
- **iv)** **το σύνολο των παιδιών που μαθαίνουν πιάνο και κιθάρα,**
- **v)** **το σύνολο των παιδιών που μαθαίνουν πιάνο αλλά όχι κιθάρα,**
- **vi)** **το σύνολο των παιδιών που δεν μαθαίνουν ούτε πιάνο ούτε κιθάρα.**

Β) **Περιγράψτε λεκτικά και γράψτε με αναγραφή των στοιχείων το σύνολο $(P - G) \cup (G - P)$.**

ΛΥΣΗ

Α) **i)** P = {Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ}, **ii)** G΄ = {Α, Β, Γ, Δ, Μ, Λ, Φ}, **iii)** $P \cup G = \{Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Τ, Ν\}$,
iv) $P \cap G = \{Ε, Ζ\}$, **v)** $P - G = P \cap G' = \{Α, Β, Γ, Δ\}$, **vi)** $(P \cup G)' = P' \cap G' = \{Μ, Λ, Φ\}$

Β) Το σύνολο των παιδιών που παίζουν μόνο ένα από τα δύο όργανα πιάνο, κιθάρα, $(P - G) \cup (G - P) = \{Α, Β, Γ, Δ, Η, Τ, Ν\}$

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο (video): "ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΛΩΝ"

*Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: **ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3** (Πρόβλημα διερευνητικής μάθησης/ μοντελοποίησης)*

Δραστηριότητες

1η) Αν $A = \{α, β, γ\}$, $B = \{γ, δ, ε\}$ και $Γ = \{α, ε, ζ\}$.

Α) Να δείξετε ότι: $A \cup B = B \cup A$, $(A \cup B) \cup Γ = A \cup (B \cup Γ)$, $A \cup \varnothing = A$ και $A \cup A = A$

Β) Αν $Δ = \{α, β\}$ $(Δ \subseteq A)$ να δείξετε ότι $A \cup Δ = A$. Οπότε αν $Δ \subseteq A$, τότε $A \cup Δ = A$

2η) Αν $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $B=\{\gamma,\delta,\varepsilon\}$ και $\Gamma=\{\alpha,\gamma,\varepsilon,\zeta\}$.

A) Να δείξετε ότι: $A\cap B=B\cap A$, $(A\cap B)\cap\Gamma=A\cap(B\cap\Gamma)$, $A\cap\varnothing=\varnothing$ και $A\cap A=A$

B) Αν $\Delta=\{\alpha,\beta\}$ $(\Delta\subseteq A)$, να δείξετε ότι $A\cap\Delta=\Delta$. Οπότε αν $\Delta\subseteq A$, τότε $A\cap\Delta=\Delta$

3η) Χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα Venn να αποδείξετε:

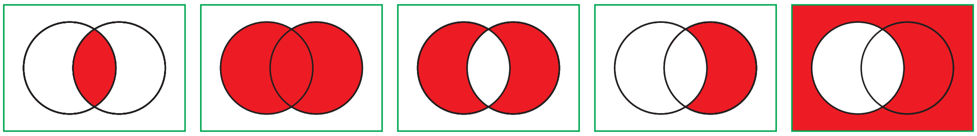
A) τις παρακάτω ισότητες γνωστές ως Νόμοι του **De Morgan**:

(1) $(A\cup B)'=A'\cap B'$, **(2)** $(A\cap B)'=A'\cup B'$

B) $A-B=A\cap B'$ και $B-A=B\cap A'$

Ασκήσεις – Προβλήματα

1) Σε καθένα από τα παρακάτω διαγράμματα Venn ονομάστε Α και Β τα υποσύνολα του βασικού συνόλου Ω και γράψτε με τη βοήθεια των πράξεων των συνόλων τα κόκκινα χωρία.



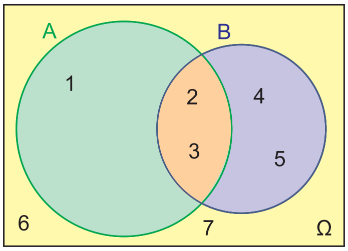
2) Αν $A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ να γράψετε όλα τα υποσύνολα του Α.

3) Δίνονται τα σύνολα: $A=\{x\in\mathbb{Z}\,/\,0<x<4\}$ και $B=\{x\in\mathbb{R}\,/\,(x-1)(x-2)(x-3)=0\}$.
Να εξετάσετε αν ισχύουν οι σχέσεις: **i)** $A\subseteq B$, **ii)** $B\subseteq A$, **iii)** $A=B$. Τι παρατηρείτε;

4) Να εξετάσετε αν $A\subseteq B$, στις ακόλουθες περιπτώσεις:

i) $A=\varnothing$, $B=\{2,5,7,9\}$ **ii)** $A=\{2,5,8,9\}$, $B=\{8,9\}$ **iii)** $A=\{x\in\mathbb{R}\,/\,2\le x\le 3\}$, $B=\mathbb{R}$
iv) $A=\{x\in\mathbb{Q}\,/\,3\le x\le 9\}$, **v)** $B=\{x\in\mathbb{R}\,/\,0\le x\le 10\}$

5) Από το διάγραμμα Venn του διπλανού σχήματος να προσδιορίσετε με αναγραφή τα στοιχεία των συνόλων Ω, Α, Β, Α΄, Β΄, $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, $B-A$, $(A\cup B)'$, $(A\cap B)'$.



6) Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

$B=\{\text{περιττοί φυσικοί αριθμοί}\}$, $\Gamma=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^3=x\}$,

$\Delta=\{x\in\mathbb{N}\,/\,x \text{ διαιρέτης του } 20\}$ $E=\{\text{ψηφία του αριθμού } 2123\}$,

$Z=\{(x,y)\,/\,x,y\in\mathbb{N} \text{ και } x+y=4\}$

7) Έστω το βασικό σύνολο Ω το σύνολο των ψηφίων. Θεωρούμε τα σύνολα:

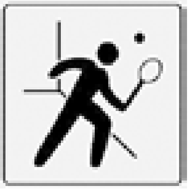
$$A=\{x\in\Omega\,/\,x \text{ άρτιος}\} \text{ και } B=\{x\in\Omega\,/\,x \text{ ψηφίο του αριθμού } 1821\}.$$

α) Να παρασταθούν τα σύνολα Α, Β με αναγραφή των στοιχείων τους και να γίνει το διάγραμμα Venn.

β) Να προσδιοριστούν τα σύνολα $A\cup B$, $A\cap B$, A', B'.

γ) Να επαληθευτεί ότι: $(A\cup B)'=A'\cap B'$ και $(A\cap B)'=A'\cup B'$.

8) Μία ομάδα squash έχει 27 μέλη. Από αυτούς, οι 19 έχουν μαύρα μαλλιά, οι 14 καφέ μάτια και 11 έχουν καφέ μάτια και μαύρα μαλλιά.



i) Να παραστήσετε τα δεδομένα σε ένα διάγραμμα Venn.

ii) Να βρείτε τον αριθμό των μελών που έχουν:

- μαύρα μαλλιά ή καφέ μάτια,
- μαύρα μαλλιά, αλλά όχι καφέ μάτια.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο, προκειμένου να απαντήσετε στο σύντομο test που προτείνεται.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

- Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων που γίνονται αντιληπτά με την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλώς ορισμένα και διακρίνονται με ευκρίνεια μεταξύ τους. Τα αντικείμενα αυτά που αποτελούν το σύνολο ονομάζονται «στοιχεία ή μέλη» του συνόλου.
- Τα σύνολα τα αναπαριστάνουμε: με αναγραφή των στοιχείων τους, με περιγραφή μιας ιδιότητάς τους και διαγράμματα Venn.
- Για να δηλώσουμε ότι ένα στοιχείο είναι στοιχείο ενός συνόλου χρησιμοποιούμε τα σύμβολα:

$$\in : \text{"ανήκει"} \ , \ \notin : \text{"δεν ανήκει"}.$$

- Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός **βασικού συνόλου** που συνήθως το συμβολίζουμε με Ω. Το σύνολο που δεν έχει στοιχεία λέγεται **κενό** σύνολο και συμβολίζεται: $\varnothing$ ή $\{\ \}$.

Ένα σύνολο Α λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου Β: $A \subseteq B$ αν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β. Αν το Β έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο που δεν ανήκει στο Α, τότε λέμε ότι το Α είναι **γνήσιο υποσύνολο** του Β και γράφουμε: $A \subset B$.

- Πράξεις μεταξύ των συνόλων:

Ένωση: $\boxed{A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ή } x \in B\}}$, **Τομή:** $\boxed{A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \in B\}}$,

Συμπλήρωμα: $\boxed{A' = \{x \in \Omega / x \notin A\}}$, **Διαφορά** δύο συνόλων: $\boxed{A - B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \notin B\}}$.

Όταν δύο σύνολα Α, Β δεν έχουν κοινά στοιχεία οπότε $A \cap B = \varnothing$, τότε λέγονται: **ξένα μεταξύ τους**.

Για κάθε $A, B, \Gamma \subseteq \Omega$ ισχύουν: $A \subseteq A$, αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \subseteq \Gamma$, αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A = B$, $\varnothing' = \Omega$, $\varnothing' = \Omega$, $A \cap A' = \varnothing$. $A \cup A' = \Omega$ και $(A')' = A$, αν $\Delta \subseteq A$ τότε $A \cup \Delta = A$ και $A \cap \Delta = \Delta$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΥΤΟΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Να λύσετε το ακόλουθο τεστ σε 30΄

ΘΕΜΑ Α

Α. Να χαρακτηρίσετε ως Αληθείς ή Ψευδείς τους παρακάτω ισχυρισμούς.

1) Το κενό σύνολο συμβολίζεται με $\{0\}$.

2) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\} = \left\{x / x = \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}^*\right\}$.

3) Το συμπλήρωμα του κενού συνόλου είναι το βασικό σύνολο Ω.

4) Για οποιαδήποτε $A, B \subseteq \Omega$, Ω βασικό σύνολο, ισχύει: $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

Β. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Αν $K = \{0,3,5\}, \Lambda = \{0\}, M = \{3,5\}, N = \{5,3\}$ τότε είναι: **Α)** $K \subseteq \Lambda$ **Β)** $\Lambda \subseteq M$ **Γ)** $M \subseteq \Lambda$ **Δ)** $N \subset K$ **Ε)** $N \subseteq \Lambda$

ii) Η τομή των συνόλων $K = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ και $\Lambda = \{\beta, \gamma, \delta\}$ είναι: **Α)** $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ **Β)** $\{\delta\}$ **Γ)** $\{\alpha\}$ **Δ)** $\{\beta, \gamma, \delta\}$ **Ε)** $\{\beta, \gamma\}$

ΘΕΜΑ Β

Έστω το βασικό σύνολο $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ και δύο υποσύνολά του: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{3,4,5,6,7,8\}$. Να βρείτε τα παρακάτω σύνολα και να τα παραστήσετε με διαγράμματα Venn.

i) $(A \cup B)'$ και $A' \cap B'$, **ii)** $(A \cap B)'$ και $A' \cup B'$

Τι παρατηρείτε σε κάθε περίπτωση;

ΘΕΜΑ Γ

Έστω το σύνολο $A = \{\nu \in \mathbb{N} / \nu \text{ διαιρέτης του } 18\}$ και το $B = \{\nu \in \mathbb{N} / \nu \text{ πολλαπλάσιο του 3 με } \nu < 24\}$. Να βρείτε τα παρακάτω σύνολα:

i) $A \cup B$ **ii)** $A \cap B$ **iii)** $B - A$

iv) $(A - B) \cap (B - A)$ **v)** $(A - B) \cup (B - A)$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω το βασικό σύνολο $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,\ldots,\nu\}$, όπου ν το πλήθος των στοιχείων του Ω είναι ίσο με $4\nu - 24$. Να βρείτε:

i) την τιμή του $\nu \in \mathbb{N}$ **ii)** το σύνολο Ω.

Ανοίξτε το διπλανό ψηφιακό αντικείμενο: "ΣΤΑΥΡΟΛΕΞΟ"

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Παράγραφος 1.1

Ασκήσεις κατανόησης (σελ. 15)

1) **α)** $-1 \le x \le 3$ **, β)** $-2 < x < \frac{2}{3}$ **, γ)** $x \le -1$ **, δ)** $x > -2$ **, ε)** $-3 \le x < \pi$

Θέματα κριτικής σκέψεις (σελ. 17)

2) iv)

Ασκήσεις - Προβλήματα (σελ. 17)

1) Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την «εις άτοπον απαγωγή»…

2) 6 φυσικός

Παράγραφος 1.2

Ασκήσεις - Προβλήματα (σελ. 26)

1) i) Δ, ii) Γ, iii) Α, **iv)** ΣΤ

2) Συμφωνούμε στα: **i)** , **ii)**

3) i) 7, ii) $\frac{\sqrt{5}}{3}$, iii) $\sqrt{2}-1$, iv) $\sqrt{2}-1$, v) $2-\sqrt{2}$ vi) $\pi - 3$,

vii) $5^{25} - 2^{50}$

6) $A = -6$, $B = 11$ **7)** $A = 1$, $B = 3$

8) $8{,}2 < 2\alpha + b < 9{,}8$, $13 < 2\alpha + 2b < 15$

12) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{2}{5}$ **14)** 2, 0, –2 **15)** i) $\frac{x}{y} < 1 < \frac{y}{x}$, ii) $\frac{x}{y}$

Θέματα κριτικής σκέψης (σελ. 27)

1) i) $|\delta - 6{,}35| \le 0{,}127$ ii) $\delta < 6{,}223$ $\delta > 6{,}477$

iii) Α) και Γ).

2) i) $|x - 232| \le 5$, ii) 237, 227

3) Για κάθε πραγματικό αριθμό x

Ασκήσεις – Προβλήματα (σελ. 30)

1) Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ιδιότητα 3 σελ.28

2) Υπόδειξη: Τετραγωνίστε και τα δύο μέλη

3),4),5),6) Όμοια με 1

7) Υπόδειξη: Για $\alpha \ne 0$ $|\alpha| = -\alpha$ σημαίνει $\alpha < 0$

Παράγραφος 1.3

Ασκήσεις – Προβλήματα (σελ. 39)

1) 20, 30, $\pi - 3$, $\pi - 3$, $\alpha - \beta$ αν $\alpha \ge \beta$ και $\beta - \alpha$ αν $\alpha < \beta$,

$-x-3$ αν $x < -3$ και $x + 3$ αν $x \ge 3$

2) Α) α) $\frac{3}{\sqrt{3}}$, β) $3\sqrt{2}$

Β) α) $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ β) $\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{12} = \sqrt{27} - \sqrt{3}$

3) i) 4, ii) 625, iii) $\sqrt{2}$, iv) $\sqrt[10]{3}$

4) $A = -4\sqrt{5}$, $B = 3$, $\Gamma = \sqrt[3]{3}$, $\Delta = 0$, $E = 1$, $Z = 1$

5) A = 1

6) i) $3 + \sqrt{5} > \sqrt{13 + 6\sqrt{5}}$, ii) $\sqrt[3]{12} > \sqrt{5}$, iii) $1 - \sqrt[3]{2} < 2 - \sqrt[3]{3}$

7) Α) α) $\frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$, β) $\frac{\sqrt[5]{2^4}}{10}$, γ) $7 + 4\sqrt{3}$, δ) $\frac{5 + \sqrt{21}}{2}$

9) Α) x = 2 , y = –3 Β) M = 3

10) $\frac{1}{\alpha} < 1 < \sqrt[6]{\alpha} < \sqrt[4]{\alpha} < \frac{\alpha}{\sqrt[3]{\alpha^2}} < \alpha^{\frac{1}{2}} < \alpha$

11) Α) $3 + 2\sqrt{2}$, $3 - 2\sqrt{2}$

12) i) $\left(\sqrt{2}+1\right)^3 = 5\sqrt{2} + 7$ και $\left(\sqrt{2}-1\right)^3 = 5\sqrt{2} - 7$

13) α) α = 81 , β = 25 , γ = 8 β) γ < β < α

14) α) Α = 8 , Β = 9 , Γ = 6 , β) $\sqrt[3]{3} > \sqrt[6]{6}$

15) α) $1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$ **16)** α) $x \le 5$

Κριτήριο αυτοαξιολόγησης (σελ. 42)

Θέμα Α

Α. 1) Ψ, 2) Ψ, 3) Α, 4) Α, 5) Ψ, 6) Α, 7) Ψ, 8) Α

Β. 1) $[-1{,}5]$, 2) $(-8{,}5)$, 3) $|x-4| \ge 2$, $d(x,4) \ge 2$,

4) 0, 5) $\sqrt[6]{x^5}$ ή $x^{\frac{5}{6}}$, 6) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ή $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

Θέμα Β

α) $A = 2$, β) $B = 4$, γ) $\Gamma = -2$

Θέμα Γ

α) $x = 3, y = 2$, γ) $\alpha = \beta$, δ) $\gamma = 2 + \sqrt{3}$, $\frac{1}{\gamma} = 2 - \sqrt{3}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Παράγραφος 2.1

Ασκήσεις κατανόησης: Β) Όχι

Ασκήσεις – Προβλήματα (σελ. 54)

1) Α) α), Β) α) , β) , Γ) α), γ)

2) Β) ναι

3) i) $\mathbb{R}$, ii) $\mathbb{R} - \{0,3\}$, iii) $[0,1) \cup (1,+\infty)$, iv) $[1,2]$

v) $[-1,0] \cup (0,1]$, vi) $[-2,2]$, vii) $\mathbb{R}$

4) i) Η(30 = 700), ii) t = 20, iii) 80 λεπτά, iv) 0 – 900 μέτρα

5) i) $[-4,+\infty)$, $[-6,+\infty)$

ii)

x	–4	–2	0	6	7	8
y	0	–2	2	2	4	6

iii) x΄x: $(-4,0),(5,0)$, y΄y: $(0,-4)$ iv) $(-4,5)$

6) Α) $[-3,+\infty)$, Β) 2025, Γ) i) $x = 1$ ή $x = \frac{1}{3}$,ii) $x = 7$

7) i) $\kappa = 0$, ii) $\kappa = 2$

8) i) x΄x: $A\left(\frac{1}{2},0\right)$, y΄y: $B(0,1)$, ii) x΄x: $A(3,0)$, y΄y: $B(0,9)$,

iii) x΄x, y΄y: $A(0,0)$, iv) x΄x:-, y΄y : $B(0,1)$

9) i) 5400, ii) 6, iii) 9000

10) ii) $E(x) = -x^2 + 4x$, $0 < x < 4$ iv) x = 4

Παράγραφος 2.2

Ασκήσεις – Προβλήματα (σελ. 63)

1) α) y = –2x + 6, β) y = 3, γ) y = – 3x, δ) x = –3

2) α) $\lambda = 3$, β) x΄x: $A\left(-\frac{4}{3},0\right)$, y΄y : $B(0,4)$, γ) $\lambda = \frac{1}{2}$

δ) για $\lambda = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_1 : y = -2x + 3$ οπότε Α, Β, Γ ανήκουν στην ε_1

3) Α) i) Για το γ): $h(x) = \begin{cases} 2x - 3 & ,x \ge \frac{3}{2} \\ -2x + 3 & ,x < \frac{3}{2} \end{cases}$

ii) Για το γ): $h(x) = \begin{cases} 4 & ,x \le -2 \\ -2x & ,-2 < x \le 2 \\ -4 & ,x > 2 \end{cases}$

Β) i) α) $f(A) = \mathbb{R}$, β) $g(A) = \mathbb{R}$, γ) $h(A)=[0,+\infty)$

ii) α) $f(A) = \mathbb{R}$, β) $g(A) = \mathbb{R}$, γ) $h(A)[-4,4]$

4) α) $\varepsilon_1 : y = -\frac{2}{3}x + 4$, $\varepsilon_2 : y = \frac{2}{3}x + 2$, β) $\left(\frac{3}{2},3\right)$

γ) λύνουμε το σύστημα που προκύπτει από τις εξισώσεις

5) $f(x)=\begin{cases}-3x-4 & ,x\le -2\\ 2 & ,-2<x\le 2\\ \frac{1}{2}x+1 & ,x>2\end{cases}$

6) i) 10 m/sec² (αλγεβρική τιμή επιτάχυνσης), $(0,5)$: $v=5m/s$
ii) $y=10x+5, x\ge 0$, iii) 85 m

7) i) 100 κιλά, ii) 100 ευρώ, iii) ζημιά,
iv) κέρδος, v) $K(x)=5x$, $E(x)=4x+100$

8) i) α = 25, β = 1000, ii) $\alpha=\frac{5}{2}$, β = 20, iii) α = 1,2, β = 3.

Παράγραφος 2.3

Ασκήσεις - Προβλήματα (σελ. 72)

1) Η C_{φ_2} προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της C_φ κατά 3 μονάδες προς τα πάνω, της C_{φ_3} οριζόντια δεξιά κατά 1 μονάδα και της C_{φ_4} 1 μονάδα οριζόντια δεξιά και 3 μονάδες κατακόρυφη πάνω.

2) A) $A=\frac{x-4}{x-2}$, B) K = 1

3) α) t_1,t_2, β) (t_1,t_2), γ) $(0,t_1),(t_2,+\infty)$

4) i) P(x) = 1,5x² + 72x –378, $0\le x\le 50$
ii) 6,42, (24, 486)

5) Για x = 5, y = 5

6) i) $y=-0{,}01x^2+70$, ii) 6, 21, 34, 45, 54, 61, 66, 69, 70

7) ii) E(x) = – 4x² + 240x , 0 < x < 60
iii) Μέγιστο εμβαδόν είναι 3600 τ.μ.

Παράγραφος 2.4

Ασκήσεις – Προβλήματα (σελ. 81)

1) $A=11$ **3)** $A=\alpha+\beta$, $B=-1$

4) A) $\eta\mu\omega=0{,}8$ $\varepsilon\varphi\omega=\frac{4}{3}$, $\sigma\varphi\omega=\frac{3}{4}$,

B) $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{\sqrt{7}}{3}$, $\varepsilon\varphi\omega=-\frac{\sqrt{14}}{7}$, $\sigma\varphi\omega=-\frac{\sqrt{14}}{2}$,

Γ) $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{4}{5}$, $\eta\mu\omega=-\frac{3}{5}$, $\sigma\varphi\omega=-\frac{4}{3}$

5) A) $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, B) $\sigma\varphi\omega=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

6) β) $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{4}{5}$, $\varepsilon\varphi\omega=\frac{3}{4}$, $\sigma\varphi\omega=\frac{4}{3}$, γ) $A=-\frac{84}{125}$

8) i) $A=|\sigma\upsilon\nu\omega|$ ii) B = 1, iii) Γ = ημω , **9)** i) A = 2, ii) B = –7

10) 33,31°, **11)** i) 31,2 ii) 2μ

Κριτήριο αυτοαξιολόγησης (σελ. 84)

Θέμα Α: A.1 β): Πεδίο ορισμού: {α, β,γ,δ},
Σύνολο αφίξεως: {1,2,3,4,5}, Σύνολο τιμών: $\{2,3,4,5\}$,
γράφημα: $\{(\alpha,2),(\beta,3),(\gamma,4),(\delta,5)\}$
δ): Πεδίο ορισμού: $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, Σύνολο τιμών: $\{2,3,4\}$,
γράφημα: $\{(\alpha,2),(\beta,3),(\gamma,4),(\delta,4)\}$
A.2 1) A, 2) Ψ, 3) Ψ, 4) A, 5) Ψ
A.3 Θετικοί είναι: ημ115°, εφ191°, σφ191°, 6υν325°,
ημ75°, συν75°, εφ75°, σφ75°

Όλοι οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι αρνητικοί.

Θέμα Β: B.1 α) $y_M=-\frac{3}{4}$, β) $\eta\mu\omega=-\frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{4}{5}$

B.2 α) $\eta\mu\omega=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{1}{2}$, $\varepsilon\varphi\omega=-\sqrt{3}$, $\sigma\varphi\omega=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,
β) 2026

Θέμα Γ: α) 40 sec, β) $S_A=20\mu$, $S_B=10\mu$

Θέμα Δ: β) i) $(-1,0),(1,0)$, ii) $(3,8),(-1,0)$
γ) i) $f(x)>0$ για $x<-1$ ή $x>1$, $f(x)<0$ για $-1<x<1$ και $f(x)=0$ για $x=-1$ ή $x=1$, ii) $-1<x<3$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Παράγραφος 3.1

Ασκήσεις κατανόησης (σελ. 88)

1) α) 12000, β) 999.996, γ) 4, δ) 100, ε) 2026

2) α) $(-x+y)^2=x^2+y^2-2xy$

β) $(2\alpha+\beta)^3=8\alpha^3+12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2+\beta^3$

γ) $8x^3-27y^3=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$

δ) $\frac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2$ ε) $\frac{(3x)^3-y^3}{(3x)^2+3xy+y^2}=3x-y$

3) α) $\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}+\beta^{\frac{1}{2}}\right)=\alpha-\beta$

β) $\left(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}-\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)=\alpha+\beta$

γ) $\left(\alpha^{\frac{1}{3}}-\beta^{\frac{1}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\alpha^{\frac{1}{3}}\cdot\beta^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)=\alpha-\beta$

δ) $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)=x-y$

ε) $\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\alpha^{\frac{1}{3}}-\beta^{\frac{1}{3}}}=\frac{\alpha^{\frac{2}{3}}+\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}+\beta^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$

Ασκήσεις – Προβλήματα (σελ. 90)

1) α) $\alpha-\beta$, β) $\alpha+1$, γ) $\alpha+x$, δ) $x^2-\alpha x+\alpha^2$

3) ii) 60.002 , **4)** ii) 1 , **5)** ii) 1 , **6)** 30

7) i) – 208, ii) 117

Κριτήριο αυτοαξιολόγησης (σελ. 92)

ΘΕΜΑ Α: A.1 α) $(x-2y)^3=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

β) $\frac{x^3-8}{x-2}=x^2+2x+4$, γ) $\frac{(x)^3-(y)^3}{x-y}=x^2+xy+y^2$

δ) $\frac{(2x)^3+(y)^3}{4x^2-2xy+y^2}=2x+y$ ε) $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^3=x+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y$

A.2 α) Ψ, β) A, γ) Ψ, δ) A, ε) Ψ

ΘΕΜΑ Β: B.1 B) $\frac{5\cdot\sqrt{3}}{3}$, B.2 β) 2026

ΘΕΜΑ Γ: Γ.2 $A=2$

ΘΕΜΑ Δ: Δ.1 A) i) 23, ii) 5, iii) 110, iv) 110,
B) i) 23, ii) 110, Δ.2 A) $\alpha^{\frac{1}{2}}+\alpha^{\frac{1}{4}}\cdot\beta^{\frac{1}{4}}+\beta^{\frac{1}{2}}$, B) 1.3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Παράγραφος 4.1

Ασκήσεις – Προβλήματα (σελ. 100)

1) α) $x=\frac{1}{3}$, Αόριστη και Ταυτοτική, Αδύνατη

β) $\lambda\neq\pm2$, γ) $\lambda=-\frac{7}{3}$

2) α) $\lambda\neq\pm1$ μοναδική λύση, λ = –1 Αόριστη και ταυτοτική, λ = 1 Αδύνατη

β) $\lambda\neq\pm2$ μοναδική λύση, $\lambda=2$ Αόριστη και ταυτοτική, $\lambda=-2$ Αδύνατη

γ) $\lambda\neq1$ μοναδική λύση, $\lambda=1$ Αόριστη και ταυτοτική

δ) $\lambda\neq-2$ μοναδική λύση, $\lambda=-2$ Αόριστη και ταυτοτική

3) Αν $\alpha\neq\beta$ μοναδικη λύση, αν $\alpha=\beta$ Αόριστη ή ταυτοτική

4) α) $x=-1$, β) $x=2$, γ) Αδύνατη, δ) Αόριστη ή ταυτοτική

5) $x=8$, $y=4$, **6)** 2,3 , **7)** $x=36$, **8)** $x=5$,

9) 40 Km , **10)** Κόστος: 668 €, Τιμή λίτρου: 1,2 €

11) α) $t=\frac{v-v_0}{\alpha}$, β) $\alpha=\frac{v-v_0}{t}$

Παράγραφος 4.2

Ασκήσεις κατανόησης (σελ. 104)

1) $(x-1)^4<x^4<y^4<(y+1)^4$

Ασκήσεις - Προβλήματα (σελ. 111)

1) –5) Χρησιμοποιείστε τις ιδιότητες των ανισοτικών σχέσεων και διάταξης

6) α) $5\leq x+y\leq7$, β) $-3\leq 2x-3y\leq2$, γ) $1\leq\frac{x}{y}\leq2$, δ) $13\leq x^2+y^2\leq25$

7) α) $12\leq\Pi\leq22$, β) $12\leq\Pi'\leq26$

8) α) $x=-1$ ή $x=\frac{5}{3}$, β) $x=-4$ ή $x=-\frac{2}{3}$,

γ) $x=4$ ή $x=-\frac{2}{7}$, δ) Αδύνατη, ε) $x=6$ ή $x=-2$,

στ) $x=3$ ή $x=\frac{5}{3}$, ζ) $x=2$, η) $x=1$

9) α) $x=-1$ ή $x=1$, β) $x=0$ ή $x=1$, γ) $x=1$ ή $x=3$ ή $x=5$, δ) Αδύνατη, ε) $x=1$

10) i) $-3\leq x\leq4$, ii) $x\leq-3$ ή $x\geq1$, iii) $x\neq-4$, iv) $-3<x<3$, v) $-4\leq x\leq2$, vi) $x\leq-3$ ή $x\geq5$, vii) $-1\leq x\leq5$, viii) $-2\leq x<1$ ή $5<x\leq8$

11) i) $x\geq-\frac{5}{3}$, ii) $x\geq2$, iii) $x\leq3$, iv) $x\leq\frac{1}{2}$

12) $A=3$ **13)** $-5\leq x<0$ ή $2<x\leq3$

14) β) $x\leq1$ ή $x\geq5$ **15)** 4,5,6

16) $4746{,}15<E<6464{,}15$ **17)** $1580\leq x\leq1620$

Παράγραφος 4.3

Ασκήσεις – Προβλήματα (σελ. 118)

1) i) $x=2$ ή $x=-2$, Αδύνατη, $x=3$, $x=-4$,

ii) $x=-1$ ή $x=0$, $x=-1$ ή $x=0$ ή $x=1$, $x=0$,

iii) $x=-1$ ή $x=3$, $x=\frac{1}{2}$, iv) x = 6 ή x = 0, x = 2

v) $x=-2$ ή $x=0$, vi) $x=-5$ ή $x=1$ ή $x=5$ ή $x=11$

2) i) $x=1$ ή $x=6$, $x=\frac{1}{3}$, Αδύνατη, ii) $x=6$, $x=2$, $x=2$,

iii) $x=1$ ή $x=5$, iv) $x=\frac{3\pm3\sqrt{5}}{2}$, v) $x=25$

3) $x=-2$ ή $x=1$ **4)** $x=2$ ή $x=3$

5) α) $x=1$ ή $x=3$, β) $x=-3$ ή $x=-1$ ή $x=1$ ή $x=3$,

γ) $x=-\sqrt{3}$ ή $x=-1$ ή $x=1$ ή $x=\sqrt{3}$

δ) $x=-2$ ή $x=0$ ή $x=2$ ή $x=4$,

ε) $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ ή $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$, στ) $x=2$ ή $x=10$, ζ) $x=3$

6) – 7 , – 11 , 77 , 71 , $\frac{71}{121}$ 93

7) α) $\Delta=\kappa^2+8>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

βi) S = κ, P = –2, βii) $x^2-(2\kappa)x-8=0$

8) 3 ώρες, 6 ώρες , **9)** 3΄

Παράγραφος 4.4

Ασκήσεις κατανόησης (σελ. 123)

1) Όχι, x = 1 ή $x>2$ **2)** Όχι, $-2\leq x\leq2$

Ασκήσεις – Προβλήματα (σελ. 127)

1) α) $f(x)>0$ για $x<-2$ ή $x>1$, $f(x)<0$ για $-2<x<1$,

$f(x)=0$ για $x=-2$ ή x = 1

β) $\frac{\pi^2}{9}+\frac{\pi}{3}-2=f\left(\frac{\pi}{3}\right)>0$,

γ) Υπόδειξη: Η ανίσωση σημαίνει $f(|\alpha|)<0$

2) α) $x\leq-2$ ή $x\geq\frac{1}{3}$, β) $-\frac{1}{2}<x<4$, γ) $x=\frac{5}{4}$,

δ) αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό, ε) αδύνατη,

στ) $x<-1$ ή $x>\frac{8}{3}$, ζ) $x\leq-3$ ή $x\geq2$, η) $\frac{1}{2}<x<1$

3) α) $x\leq-8$ ή $x\geq-1$, β) $\mathbb{R}$

4) α) $x\leq-4$ ή $x\geq3$, $1<x<6$, β) $-3<x<2$

5) ii), iii) $\lambda^2-\lambda-2>0$ για $\lambda<-1$ ή $\lambda>2$ και η εξίσωση έχει 2 ρίζες άνισες, $\lambda^2-\lambda-2=0$ για $\lambda=-1$ ή $\lambda=2$ και η εξίσωση έχει 2 ρίζες ίσες, $\lambda^2-\lambda-2<0$ για $-1<\lambda<2$ και η εξίσωση δεν έχει ρίζες, iv) $\lambda<-1$

6) $-9<\alpha<-1$ **7)** $\lambda<-3$

8) α) 43, β), γ) $3<x<8$ **9)** 5 αγόρια και 5 κορίτσια

10) β) $-1<x<2$, γ) π.χ. $f(x)=x^2+1$, $g(x)=x+3$

11) α) $1<x<4$, β) αρνητικό,

γ) π.χ. $\varphi(-2)\cdot\varphi(0)\cdot\varphi(2)\cdot\varphi(3)\cdot\varphi(5)$

12) α) Κόστος: 0,2, 5, 65, Έσοδα: 0,2, 5, 65

β) Κερδοφόρα για 10,11,…,29 και παρουσιάζει έλλειμα για 8 και 31,…,40

13) A) $-3<x<2$, B) i) $-\frac{1}{2}<y<5$ ii) $-6<x<4$

14) Αν m η κλίση της ευθείας τότε:

i) $m<-2\sqrt{3}$ ή $m>2\sqrt{3}$ ii) $m=\pm2\sqrt{3}$ iii) $-2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$

15) $123\leq x\leq277$

Κριτήριο αυτοαξιολόγησης (σελ. 130)

ΘΕΜΑ Α: 1. Ψ 2. Α 3. Ψ 4. Ψ 5. Α 6. Ψ

ΘΕΜΑ Β: α) $\Delta = \alpha^2 - 4\beta \geq 0$,

β) Για παράδειγμα:

$x^2 - 3x + 1 = 0,\ x^2 - 4x + 4 = 0,\ x^2 - x + 2 = 0$

ΘΕΜΑ Γ: α) $x^2 + 2x - 15 = 0$, β) $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$,

γ) $x^2 - 7\alpha x + 10\alpha^2 = 0$

ΘΕΜΑ Δ: i) $x = 0$ ή $x = 4$, ii) $x = -\frac{2}{5}$ ή $x = -\frac{1}{5}$ iii) $x \leq -5$ ή $x \geq \frac{1}{2}$, iv) $x \leq -3$ ή $x \geq 3$, v) αδύνατη στο $\mathbb{R}$

ΘΕΜΑ Ε: i) 30 μέτρα, ii) 5 μέτρα, 15 μέτρα, iii) $5 < x < 15$

ΘΕΜΑ ΣΤ: α) $m = -4$ ή $m = 4$, β) $m < -4$ ή $m > 4$,

γ) $-4 < m < 4$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ασκήσεις – Προβλήματα (σελ.149)

1) $A \cap B,\ A \cup B,\ (A - B) \cup (B - A),\ B - A,\ A'$

2) $\varnothing$, $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$, $\{\delta\}$, $\{\alpha,\beta\}$, $\{\alpha,\gamma\}$, $\{\alpha,\delta\}$, $\{\beta,\gamma\}$, $\{\beta,\delta\}$, $\{\gamma,\delta\}$, $\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $\{\alpha,\beta,\delta\}$, $\{\alpha,\gamma,\delta\}$, $\{\beta,\gamma,\delta\}$, $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$

3) i), ii), iii) αληθείς. Παρατηρούμε ότι: $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A = B$

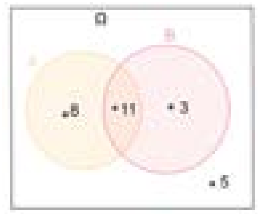
4) i) Ναι, ii) Όχι, iii) Ναι, iv) Ναι

5) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5\}$,
$A' = \{4,5,6,7\}$, $B' = \{1,6,7\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$,
$A \cap B = \{2,3\}$, $A - B = \{1\}$, $B - A = \{4,5\}$, $(A \cup B)' = \{6,7\}$,
$(A \cap B)' = \{1,4,5,6,7\}$

6) $B = \{1,3,5,7,9,\ldots\}$, $\Gamma = \{-1,0,1\}$, $\Delta = \{1,2,4,5,10,20\}$,
$E = \{1,2,3\}$, $Z = \{(0,4),(4,0),(1,3),(3,1),(2,2)\}$

7) $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, α) $A = \{0,2,4,6,8\}$, $B = \{1,2,8\}$,
β) $A \cup B = \{0,1,2,4,6,8\}$, $A \cap B = \{2,8\}$, $A' = \{1,3,5,7,9\}$,
$B' = \{0,3,4,5,6,7,9\}$, γ) $(A \cup B)' = A' \cap B' = \{3,5,7,9\}$,
$(A \cap B)' = A' \cup B' = \{0,1,3,4,5,6,7,9\}$

8) i)



ii) Αν $N(\Omega) = 27$, $A = \{$μαύρα μαλλιά$\}$, B=$\{$καφέ μάτια$\}$,

$N(A) = 19$, $N(B) = 14$, $N(A \cap B) = 11$ οπότε:

$N(A \cup B) = 22$, $N(A - B) = 8$

Κριτήριο αυτοαξιολόγησης (σελ. 143)

ΘΕΜΑ Α: Α) 1) Ψ, 2) Α , 3) Α, 4) Α, Β) i) Δ, ii) Γ, iii) Δ, iv) Ε

ΘΕΜΑ Β: i) $(A \cup B)' = A' \cap B' = \{9\}$,
ii) $(A \cap B)' = A' \cup B' = \{1,2,7,8,9\}$

ΘΕΜΑ Γ: $A = \{1,2,3,6,9,18\}$, $B = \{3,6,9,12,15,18,21\}$

i) $A \cup B = \{1,2,3,6,9,12,15,18,21\}$

ii) $A \cap B = \{3,6,9,18\}$ iii) $B - A = \{12,15,21\}$

iv) $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$ v) $(A - B) \cup (B - A) = \{1,2,12,15,21\}$

ΘΕΜΑ Δ: i) ν = 8 ii) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Γλωσσάρι

Πραγματικοί Αριθμοί: Το σύνολο που περιλαμβάνει τους φυσικούς, τους ακέραιους, τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς.

Φυσικοί Αριθμοί: Οι αριθμοί καταμέτρησης.

Ακέραιοι Αριθμοί: Οι φυσικοί και οι αντίθετοί τους, αρνητικοί.

Ρητοί Αριθμοί: Οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν ως κλάσματα.

Άρρητοι Αριθμοί: Αριθμοί που δεν είναι ρητοί, οπότε το δεκαδικό τους ανάπτυγμα είναι άπειρο κα μη-περιοδικό.

Διαδοχικότητα: Ιδιότητα του συνόλου των φυσικών και ακεραίων αριθμών, όπου για κάθε αριθμό υπάρχει ο επόμενός του. (Δεν ισχύει για ρητούς και άρρητους αριθμούς)

Πυκνότητα: Ιδιότητα των πραγματικών αριθμών σύμφωνα με την οποία, μεταξύ δύο αριθμών υπάρχει πάντα ένας άλλος αριθμός. (Ισχύει και για τους ρητούς, αλλά και για τους άρρητους αριθμούς)

Διαστήματα: Υποσύνολα των πραγματικών αριθμών, όπως για παράδειγμα το [α, β), όπου περιλαμβάνει όλους τους αριθμούς μεταξύ των α, β, συμπεριλαμβανομένου του α και όχι του β.

Απόλυτη Τιμή: Η απόσταση ενός αριθμού από το μηδέν στην αριθμογραμμή.

Νιοστή Ρίζα του μη αρνητικού αριθμού α ορίζουμε τη μοναδική μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^\nu=\alpha$, με ν θετικό ακέραιο αριθμό.

Συναρτήσεις: Σχέσεις που συνδέουν κάθε στοιχείο ενός συνόλου (πεδίο ορισμού), με ένα μόνο στοιχείο ενός άλλου συνόλου (σύνολο άφιξης).

Εξίσωση Ευθείας: Συνάρτηση της μορφής y=αx+β, όπου α η κλίση και β η τομή με τον άξονα yy΄ (όταν δεν ορίζεται κλίση, έχουμε την ευθεία της μορφής x = c, c:σταθερό)

Τριγωνομετρία: Κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με τις σχέσεις πλευρών και γωνιών τριγώνου.

Αλγεβρικές Ταυτότητες: Ισότητες που επαληθεύονται για κάθε τιμή των μεταβλητών.

Εξισώσεις: Μαθηματικές σχέσεις ισότητας, που περιέχουν αριθμούς, μεταβλητές και πράξεις μεταξύ αυτών. Λύση ονομάζεται ο αριθμός (ή οι αριθμοί) που την ικανοποιούν.

Εξισώσεις 2ου Βαθμού: Εξισώσεις της μορφής: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με α≠0. Η λύση τους μπορεί να βρεθεί με τη χρήση της διακρίνουσας: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

Ανισότητες: Μαθηματικές σχέσεις που εκφράζουν τη σχέση μεγέθους μεταξύ αριθμών (ή και μεταβλητής).

Σύνολα: Συλλογές αντικειμένων που είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται με σαφήνεια το ένα από το άλλο.

Πράξεις Συνόλων:

- Τομή: Στοιχεία που ανήκουν και στα δυο σύνολα
- Ένωση: Στοιχεία που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον σύνολο
- Συμπλήρωμα Συνόλου Α: Στοιχεία που ανήκουν στο βασικό σύνολο, αλλά όχι στο Α.

Ευρετήριο όρων